


Д. Д. Кловский  
В. А. Шилкин

# ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

Сборник  
задач  
и упражнений

---

Допущено Министерством связи СССР  
в качестве учебного пособия  
для студентов вузов связи,  
обучающихся по специальностям  
23.05 «Автоматическая электросвязь»,  
23.06 «Многоканальная электросвязь»,  
23.07 «Радиосвязь, радиовещание  
и телевидение»

 Москва  
«Радио и связь»  
1990

ББК 32.88  
К50  
УДК 621.312.01 (076)

Рецензенты: кафедра теории электрической связи Одесского электротехнического института связи им. А. С. Попова (зав. кафедрой д-р техн. наук проф. А. Г. Зюко), д-р техн. наук проф. Л. Ф. Григоровский

Редакция литературы по информатике и вычислительной технике

**Кловский Д. Д., Шилкин В. А.**

К 50 Теория электрической связи. Сб. задач и упражнений: Учеб. пособие для вузов. — М.: Радио и связь, 1990. — 280 с.: ил.

ISBN 5-256-00675-4.

Приводятся задачи по основным разделам курса теории электрической связи, в которых отражаются общие закономерности передачи информации по каналам связи. Отмечаются потенциальные возможности различных способов передачи и приема сигналов. В каждом разделе даются краткие теоретические сведения. Для части задач приводятся подробные решения. Остальные задачи сопровождаются указаниями к решению и ответами.

Для студентов вузов, обучающихся по специальностям «Автоматическая электросвязь», «Многоканальная электросвязь», «Радиосвязь, радиовещание и телевидение» и смежным специальностям.

К 2303020000-092  
046(01)-90 98-90

ББК 32.88

Учебное издание

*Кловский Даниил Давыдович*  
*Шилкин Владимир Афанасьевич*

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ.  
СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ

Учебное пособие

Заведующая редакцией Г. И. Козырева. Редактор В. И. Ченцова.  
Переплет художника С. Ю. Архангельского. Художественный редактор Л. В. Проценко.  
Технический редактор Т. Г. Родина. Корректор Т. В. Дземидович

ИБ № 1156

Сдано в набор 29.05.89 Подписано в печать 02.04.90  
Формат 60×90<sup>1/16</sup> Бумага типогр. № 2 Гарнитура литературная  
Печать высокая Усл. печ. л. 17,5 Усл. кр.-отт. 17,5 Уч. изд. л. 18,51  
Тираж 7000 экз. Изд. № 21142 Зак. № 53 Цена 95 к.  
Издательство «Радио и связь», 101000 Москва, Почтамт, а/я 693

Типография издательства «Радио и связь», 101000 Москва, ул. Кирова, д. 40

ISBN 5-256-00675-4

© Кловский Д. Д., Шилкин В. А., 1990

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
Глава 1. СИСТЕМЫ СВЯЗИ И СПОСОБЫ ПЕРЕДАЧИ СООБЩЕНИЙ . . . . .	7
1.1. Сообщение и сигнал, система связи, канал связи . . . . .	7
1.2. Кодирование и декодирование . . . . .	13
1.3. Модуляция . . . . .	15
Глава 2. СООБЩЕНИЯ, СИГНАЛЫ, ПОМЕХИ . . . . .	18
2.1. Сообщения, сигналы и помехи как случайные процессы . . . . .	18
2.2. Спектры случайных процессов . . . . .	26
2.3. Огибающая, мгновенная фаза и частота узкополосного случайного процесса . . . . .	27
2.4. Пространства сообщений и сигналов . . . . .	31
2.5. Основы теории дискретизации функций непрерывного аргумента. Теорема Котельникова . . . . .	37
Глава 3. КАНАЛЫ СВЯЗИ . . . . .	40
3.1. Модели каналов связи и их математическое описание . . . . .	40
3.2. Изменения формы сигналов, обусловленные характеристиками непрерывного канала . . . . .	47
3.3. Аддитивные помехи в непрерывном канале связи . . . . .	51
3.4. Прохождение случайных воздействий через канал связи и его звенья . . . . .	55
3.5. Уравнения состояния. Марковские модели каналов связи . . . . .	59
Глава 4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ . . . . .	63
4.1. Количественное определение информации. Энтропия и производительность дискретного источника сообщений . . . . .	63
4.2. Количество и скорость передачи информации по дискретному каналу. Пропускная способность дискретного канала. Теорема кодирования для каналов с шумами . . . . .	67
4.3. Энтропия и производительность непрерывного источника сообщений . . . . .	72
4.4. Количество и скорость передачи информации по непрерывному каналу. Пропускная способность непрерывного канала . . . . .	76
Глава 5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО КОДИРОВАНИЯ . . . . .	79
5.1. Принципы помехоустойчивого кодирования . . . . .	79
5.2. Линейные двоичные блочные коды . . . . .	81
5.3. Циклические коды . . . . .	87
5.4. Некоторые разновидности корректирующих кодов . . . . .	88
Глава 6. ПРИЕМ ДИСКРЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ . . . . .	94
6.1. Критерии оптимального приема. Алгоритмы оптимального приема при точно известном сигнале . . . . .	94
6.2. Реализация алгоритма оптимального приема при точно известном сигнале на основе согласованных фильтров . . . . .	99
6.3. Помехоустойчивость (вероятность ошибки) оптимальных схем приема при точно известном сигнале . . . . .	102
6.4. Алгоритм оптимального приема и помехоустойчивость при неопределенной фазе и амплитуде сигнала . . . . .	107

Глава 7.	ПРИЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ . . . . .	110
7.1.	Оптимальная оценка отдельных параметров сигнала . . . . .	110
7.2.	Оптимальная демодуляция непрерывных сообщений. Расчет помехоустойчивости аналоговых систем передачи . . . . .	114
7.3.	Оптимальная линейная фильтрация по критерию минимума среднего квадрата ошибки . . . . .	118
Глава 8.	ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ ПЕРЕДАЧИ НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ . . . . .	124
8.1.	Характеристики качества передачи непрерывных сообщений в системах с импульсно-кодовой модуляцией . . . . .	124
Глава 9.	ТЕОРИЯ МНОГОКАНАЛЬНОЙ ПЕРЕДАЧИ СООБЩЕНИЙ . . . . .	128
9.1.	Основы теории разделения сигналов . . . . .	128
9.2.	Способы разделения сигналов . . . . .	131
Глава 10.	МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ СООБЩЕНИЙ . . . . .	137
10.1.	Предельная эффективность систем передачи сообщений . . . . .	137
10.2.	Эффективность аналоговых и цифровых систем . . . . .	141
10.3.	Характеристики эффективности многоканальных систем . . . . .	143
10.4.	Эффективность избыточного кодирования и многопозиционных сигналов . . . . .	147
	Решения и указания к решению задач главы 1 . . . . .	150
	Решения и указания к решению задач главы 2 . . . . .	155
	Решения и указания к решению задач главы 3 . . . . .	172
	Решения и указания к решению задач главы 4 . . . . .	185
	Решения и указания к решению задач главы 5 . . . . .	199
	Решения и указания к решению задач главы 6 . . . . .	205
	Решения и указания к решению задач главы 7 . . . . .	230
	Решения и указания к решению задач главы 8 . . . . .	246
	Решения и указания к решению задач главы 9 . . . . .	247
	Решения и указания к решению задач главы 10 . . . . .	254
	О т в е т ы . . . . .	266
	Список литературы . . . . .	280

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга является первым учебным пособием по курсу «Теория электрической связи» (ТЭС), изучение которого с 1988 г. предусмотрено учебными планами для специальностей «Автоматическая электросвязь», «Многоканальная электросвязь», «Радиосвязь, радиовещание и телевидение» институтов связи.

При подготовке книги авторы использовали многолетний опыт преподавания курса «Теория передачи сигналов» в Куйбышевском электротехническом институте связи, а также опыт работы над учебным пособием «Теория передачи сигналов в задачах», вышедшим в издательстве «Связь» в 1978 г. и положенным в основу настоящего издания.

Согласно программе курса ТЭС в данное учебное пособие, в отличие от названного, включены задачи по таким разделам как «Системы связи и способы передачи сообщений», «Уравнения состояния. Марковские модели каналов связи», «Цифровые методы передачи сообщений». В раздел «Пространства сообщений и сигналов» введены задачи по ансамблям многомерных сигналов. Выделен в отдельную главу и существенно дополнен материал по методам повышения эффективности систем связи. Значительно переработаны главы «Теория многоканальной передачи сообщений» и «Основы теории помехоустойчивого кодирования», в которую включены новые задачи, в частности по сверточным кодам. Учебное пособие условно можно разделить на две части: в первой приводятся задачи, во второй — решения и ответы.

По содержанию, расположению материала и основным обозначениям пособие соответствует учебнику [12], рекомендованному для изучения курса ТЭС, и дополняет его.

Книга содержит 10 глав, в которых приведено около 600 задач, иллюстрирующих общие закономерности передачи сообщений по каналам связи, потенциальные возможности способов передачи и приема сигналов. Каждый раздел имеет краткое теоретическое введение, в котором даны основные расчетные соотношения.

В пособии приведены как простые, так и сложные задачи, решение которых может показаться затруднительным. В этих случаях потребуется квалифицированная помощь преподавателей. В книгу не вошли традиционные задачи по расчету вероятностных характеристик случайных величин и случайных процессов, которые содержатся, например, в [3, 6]. При решении ряда задач возникает необходимость использования микроЭВМ. В этом случае

можно воспользоваться прикладными программами из [1, 5, 9].

Многие вероятностные задачи расчета отдельных звеньев систем передачи сообщений, которые стоят перед современными инженерами, занимающимися разработкой и эксплуатацией систем связи, требуют знаний, выходящих за пределы курса ТЭС. В этом случае следует обратиться к специальной литературе. Однако при этом необходимо овладеть основными идеями и методами расчета статистической теории связи. Именно с этой точки зрения книга может оказаться полезной широкому кругу читателей, занимающихся разработкой и эксплуатацией систем передачи сообщений.

## Глава 1. СИСТЕМЫ СВЯЗИ И СПОСОБЫ ПЕРЕДАЧИ СООБЩЕНИЙ

---

### 1.1. СООБЩЕНИЕ И СИГНАЛ, СИСТЕМА СВЯЗИ, КАНАЛ СВЯЗИ

Сообщением называют совокупность знаков (символов), содержащих те или иные сведения (информацию).

Сообщения дискретного источника (текста телеграммы, данные с выхода ЭВМ и другие) образуют счетные множества (эти символы можно пронумеровать), в то время как сообщения непрерывного источника (речь, музыка, телевизионное изображение) образуют несчетные (континуальные) множества.

Физический процесс, отображающий (несущий) передаваемое сообщение по времени, называют сигналом.

Если сигнал представляет собой функцию  $u(t)$ , принимающую только дискретные значения  $u_k$ , его называют дискретным (точнее дискретным по состояниям). Если сигнал может принимать любые значения в некотором интервале, его называют непрерывным (по состояниям) или аналоговым.

Иногда сообщение (сигнал) задается не на всей оси времени, а только в определенные моменты  $t_k$ . Такие сообщения (сигналы) называют дискретными по времени.

Совокупность технических средств, служащих для передачи сообщений от источника к потребителю, называют системой связи.

Канал связи — это совокупность технических средств, обеспечивающих передачу сигнала от одной точки системы до другой. Точки входа и выхода канала определяются решаемой (исследуемой) задачей.

Канал является дискретным, если на его входе и выходе — дискретные (по состояниям) сигналы, и непрерывным, если эти сигналы непрерывные. У дискретно-непрерывного и непрерывно-дискретного канала на входе действуют дискретные сигналы, а на выходе непрерывные и наоборот.

Емкостью (объемом) сигнала  $V_c$  называют произведение трех его физических характеристик: длительности сигнала  $T_c$ , ширины спектра  $F_c$  и динамического диапазона уровней сигнала (по мощности)  $D_c$ :

$$V_c = T_c F_c D_c, \quad (1.1)$$

$$D_c = 10 \lg \frac{P_{\max}}{P_{\min}}. \quad (1.2)$$

В этом выражении  $P_{\max}$  — максимальное (пиковое) значение мощности сигнала;  $P_{\min}$  — минимальное значение мощности сигнала.



Величина  $V_c$  чаще всего характеризует весь ансамбль используемых в данной системе связи сигналов. Иными словами, эта характеристика описывает сигнал как случайный процесс. В этом случае  $T_c$  — это средняя длительность сигнала;  $F_c$  — ширина энергетического спектра, а  $P_{\max}$  и  $P_{\min}$  при определении  $D_c$  для ансамбля с неограниченным числом реализаций представляют собой уровни мощности, которые соответственно превышаются и не превышаются с какой-либо заданной малой вероятностью. Емкость сигнала — весьма важная характеристика, позволяющая оценивать трудности, связанные с его передачей.

При наличии шумов в канале допустимый минимальный уровень мощности  $P_{\min}$  обычно определяется средней мощностью шумов в канале. Поэтому можно записать

$$D_c = 10 \lg \frac{P_{\max}}{P_{\text{ш}}} \quad (1.3)$$

Максимальную мощность  $P_{\max}$  иногда выражают через усредненную за достаточно большой интервал времени мощность сигнала  $P_c$ . В этом случае

$$D_c = 10 \lg \frac{\Pi^2 P_c}{P_{\text{ш}}}, \quad (1.4)$$

где  $\Pi^2 = P_{\max}/P_c$  — пик-фактор сигнала по мощности. Эта величина зависит от статистики сигнала. Отношение средних мощностей сигнала и шума  $P_c/P_{\text{ш}}$  часто называют просто отношением сигнал-шум.

Аналогично емкости сигнала можно ввести характеристику, называемую емкостью (объемом) канала,

$$V_k = T_k F_k D_k \quad (1.5)$$

где  $T_k$  — время использования канала;  $F_k$  — полоса пропускаемых каналом частот;  $D_k$  — динамический диапазон уровней, пропускаемых каналом с допустимыми искажениями.

Для передачи сигнала, имеющего объем  $V_c$ , с достаточно высоким качеством должно выполняться неравенство

$$V_c \leq V_k \quad (1.6)$$

При этом необходимо согласование сигнала и канала по всем трем параметрам, т. е.

$$T_c \leq T_k, F_c \leq F_k, D_c \leq D_k \quad (1.7)$$

Выполнение этих условий означает, что для обеспечения удовлетворительного качества при передаче сигналов требуется, чтобы объем сигнала «вписывался» в объем канала.

Естественно, что необходимо также согласование сигнала и канала в пределах общих интервалов времени, частот и уровней.

## Задачи

1.1.1. Дискретный источник выдает последовательность 3-символьных сообщений  $A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}$  (первый индекс показывает значение элемента, а второй — его номер в последовательности), выбираемых из дискретного алфавита  $a_i$  ( $i = \overline{0, K-1}$ ;  $K=8$  — объем алфавита источника). Сколько различных сообщений  $N$  мо-

жет выдать такой источник? Выпишите реализации сообщений, у которых два первых символа  $a_{11}, a_{72}$ .

1.1.2. Выпишите реализации сообщений источника, заданного в задаче 1.1.1, у которых номера двух символов приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$i_1$	1	1	8	7	—	—	4	—	1	7	7	—
$i_2$	—	3	1	—	2	8	4	3	—	—	6	1
$i_3$	2	—	—	8	8	1	—	3	6	2	—	5

1.1.3. Данные из ЭВМ выдаются в двоичном коде ( $m=2$ ) кодовыми комбинациями, содержащими  $n=7$  символов. Сколько таких сообщений может выдать источник? Напишите две реализации такого источника, принимая  $a_{ik} \in \{0, 1\}$ .

1.1.4. Решите задачу 1.1.3 для значений числа разрядов в кодовой комбинации  $n$ , заданных в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$n$	5	8	6	15	9	13	11	10	12	17	14	19	21	22	2

1.1.5. Дискретные источники  $A$  и  $B$  выдают двоичные символы  $a_{ik}, b_{ik} \in \{0, 1\}$ . Эти символы попарно отображаются (кодируются) новым символом  $c_{ik}$ . Сколько реализаций принимает символ  $c_{ik}$ ?

1.1.6. Датчик температуры через дискретные интервалы времени  $\Delta t = 1$  мин выдает значения температуры в пределах  $16^\circ \dots 36^\circ$ . Сколькими уровнями  $K$  можно отобразить (квантовать) шкалу температур, чтобы погрешность квантования  $\delta$  не превысила по модулю  $0,5^\circ$ ? Сколько различных сообщений может выдать такой дискретный во времени и квантованный по уровням источник, если длительность каждого сообщения  $T = 4$  мин?

1.1.7. Решить задачу 1.1.6 для вариантов числовых значений величин, заданных в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\Delta t$ , мин	0,5	1	0,4	1	1	0,5	0,2	1	2	0,2	0,2	1
$\delta$	0,2	0,4	0,1	0,5	0,3	0,4	0,3	0,1	0,4	0,3	0,5	0,2
$T$ , мин	4	9	4	8	7	5	2	8	10	2	2	8

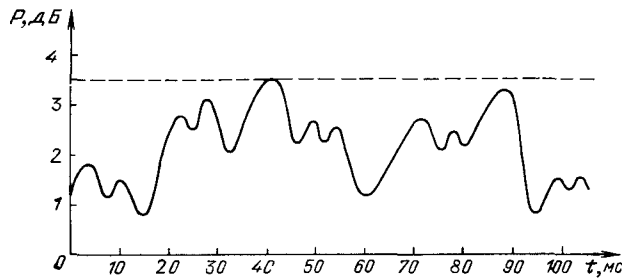


Рис. 1.1. Изменение звукового давления

1.1.8. Изменение давления, создаваемого говорящим у микрофона за время  $T=100$  мс, показано на рис. 1.1. Уровень давления, измеряемый в децибелах, меняется в пределах 0,5 ... 3,5 дБ. Верхняя частота спектра сообщения  $F_{\text{макс}}=4000$  Гц. Сколькими реализациями можно описать сообщения источника при дискретном времени с шагом  $\Delta t=1/(2F_{\text{макс}})$  и квантовании уровней с шагом  $\Delta P=1$  дБ?

1.1.9. Яркость точки плоского черно-белого изображения  $B(x, y)$  меняется в пределах 0 ... 160 кд/м<sup>2</sup> (кандела на квадратный метр). Изображение имеет форму прямоугольника с размерами по вертикали 625 мм и горизонтали 833 мм. Каким числом точек определяется кадр изображения, если различаются соседние точки на расстоянии порядка 1 мм. Чему равно число различных кадров изображения при квантовании яркости с шагом  $\Delta B=10$  кд/м<sup>2</sup>?

1.1.10. Три компоненты сигнала точки плоского цветного изображения  $B(x, y)$ ,  $R(x, y)$ ,  $G(x, y)$  меняются независимо. Число различных точек кадра изображения  $N=0,75 \cdot (625)^2=520\,000$ . Чему равно число различных кадров изображения, если сигнал яркости  $B(x, y)$  передавать с 16 градациями, а сигналы цветности  $R(x, y)$ ,  $G(x, y)$  с 8 градациями?

1.1.11. На рис. 1.2 показана реализация двоичного первичного сигнала  $b(t)$  в системе передачи данных, отображающая 7 кодовых посылок длительностью  $T=10$  мс. Каким числом реализаций определяется такой сигнал на интервале  $T_n=7T$ ? Покажите, что огибающая амплитудного спектра этого сигнала  $S_b(f)=hT \times \left| \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right|$ , максимум спектра соответствует нулевой частоте, а нули спектра соответствуют частотам  $f_k=k/T$ ,  $k=1, 2, 3, \dots$  Какую полосу частот  $F_c$  занимает сигнал  $b(t)$ , если ширина спектра определяется тремя первыми лепестками функции  $\left| \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f T} \right|$ .

1.1.12. На рис. 1.3 показана реализация напряжения нормированного первичного сигнала  $b(t)$  в системе передачи речи с максимальной частотой спектра  $F_{\text{макс}}=4$  кГц. С какой частотой работает генератор стробирования (взяты отсчеты) речевого сигнала, если шаг дискретизации во времени  $\Delta t=1/(2F_{\text{макс}})$ ? Каким числом реализаций определяется речевой сигнал на интервале

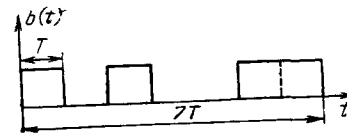


Рис. 1.2. Реализация двоичного сигнала

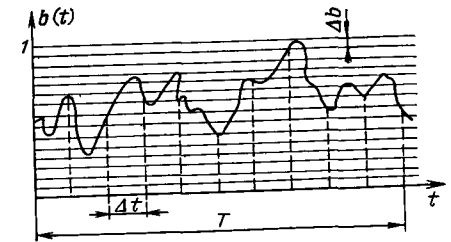


Рис. 1.3. Реализация нормированного речевого сигнала

$T=2$  мс при дискретизации во времени и квантовании по уровням с шагом  $\Delta b=0,02$  В, если  $|b| \leq 1$  В?

1.1.13. Решить задачу 1.1.12 для вариантов числовых значений величин, приведенных в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F_{\text{макс}}$ , кГц	4	5	6	2	6	9	10	8	1	4	9	1
$T$ , мс	4	4	2	3	6	10	9	1	2	9	5	3
$\Delta b$ , В	0,01	0,02	0,02	0,06	0,01	0,02	0,07	0,08	0,01	0,04	0,04	0,05
$ b _{\text{макс}}$ , В	1	2	3	3	2	4	7	4	3	2	2	5

1.1.14. Определить, во сколько раз емкость телевизионного сигнала превосходит емкость радиовещательного сигнала (при одинаковой их длительности), если  $F_{\text{ТВ}}=6,5$  МГц, и  $F_{\text{РВ}}=12$  кГц. (Динамические диапазоны телевизионного и радиовещательного сигналов следует считать одинаковыми.)

1.1.15. Сравнить объемы двух сигналов, параметры которых заданы в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T_1$ , с	4	5	3	7	9	4	6	4	10	1	1	5
$F_1$ , кГц	8	1	8	3	3	9	3	4	4	9	5	7
$D_1$ , дБ	70	70	20	80	50	30	50	10	90	90	20	100
$T_2$ , с	3	7	5	6	1	5	9	6	8	8	9	3
$F_2$ , кГц	4	10	3	4	3	8	1	10	2	3	6	1
$D_2$ , дБ	50	90	80	100	20	20	70	80	60	40	20	10

1.1.16. Текст из ста букв передается по телефонному каналу в течение 30 с. Тот же текст за то же время передается по телеграфному каналу пятизначным двоичным кодом. Приняв динами-

ческие диапазоны телефонного и телеграфного сигналов равными, определить, во сколько раз телеграфный сигнал экономичнее телефонного.

1.1.17. Канал связи с полосой  $F_k=10$  кГц предполагается использовать в течение 10 с. В канале действует шум с равномерной спектральной плотностью мощности  $N_0=10^{-4}$  мВт/Гц. Какова предельная мощность сигнала, который может быть передан по данному каналу, если объем канала  $V_k=10^6$ ?

1.1.18. Решить задачу 1.1.17. для вариантов числовых значений, приведенных в табл. 1.6.

Таблица 1.6

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F_k$ , кГц	4	9	4	8	6	5	2	8	10	2	2	2
$N_0$ , мВт/Гц	$10^{-4}$	$10^{-9}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-8}$	$10^{-8}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
$V_k$	$10^4$	$10^6$	$10^6$	$10^6$	$10^5$	$10^6$	$10^6$	$10^6$	$10^7$	$10^6$	$10^5$	$10^6$
$T_k$ , с	7	7	20	8	5	30	5	10	7	9	9	20

1.1.19. Амплитудно-модулированный сигнал  $u_{AM}(t)=U_m(1+m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t$  предполагается передать по каналу с объемом  $V_k=10^5$ . Найти допустимый коэффициент глубины модуляции  $m$ , если полоса частот сигнала  $F_c=100$  Гц, а его длительность  $T_c=10$  с.

1.1.20. Решить задачу 1.1.19 для вариантов числовых значений, приведенных в табл. 1.7.

Таблица 1.7

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$V_k$	$4 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^4$	$10^4$	$9 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$10^4$	$5 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^4$	$10^4$	$9 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$
$F_c$ , Гц	400	400	900	500	700	700	800	100	900	400	600	200
$T_c$ , с	6	3	7	8	9	5	4	9	5	8	3	3

1.1.21. По каналу связи, в котором действует шум с энергетическим спектром  $G_0(f) = \frac{\sqrt{\pi} B(0)}{\beta} \exp \left[ -\frac{\pi^2 (f-f_0)^2}{\beta^2} \right]$ , передается ЧМ-сигнал  $u_{ЧМ}(t) = U_m \cos \left[ \omega_0 t + \Delta \omega \int_0^t b(x) dx + \varphi_0 \right]$ . Полоса сигнала  $F_c=100$  кГц, длительность  $T_c=10$  с. Определить допустимую амплитуду сигнала, если  $V_k=2 \cdot 10^7$ ;  $\beta=1,13 \cdot 10^5$ , средняя мощность шума  $P_{ш}=10^{-2}$  Вт.

1.1.22. Амплитуда сигнала распределена по закону Релея:

$$\omega(A) = \frac{2A}{A^2} \exp \left( -\frac{A^2}{A^2} \right), A \geq 0,$$

где  $A$  — мгновенное значение амплитуды сигнала;  $\overline{A^2}$  — средний квадрат амплитуды.

Полоса частот сигнала  $F_c=4$  кГц, а его длительность  $T_c=10$  с. Найти объем сигнала, если за максимальный и минимальный уровни мощности сигнала приняты такие значения, которые соответственно превышаются и не превышаются с вероятностью  $p=10^{-3}$ .

1.1.23. Решить задачу 1.1.22 для числовых значений величин, заданных в табл. 1.8.

Таблица 1.8

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F_c$ , кГц	5	3	4	6	9	1	2	4	10	2	7	6
$T_c$ , с	15	17	14	18	19	17	14	15	17	10	12	17
$p$	$10^{-4}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-2}$

## 1.2. КОДИРОВАНИЕ И ДЕКОДИРОВАНИЕ

Кодирование (в узком смысле) — сопоставление дискретному сообщению  $a_i$  ( $i=1, \overline{K}$ ) определенной последовательности кодовых символов, выбираемых из конечного множества символов  $\{b_j\}$  ( $j=1, \overline{m}$ ), называемого кодовым алфавитом. Если число разрядов во всех кодовых комбинациях  $n=\text{const}$ , то код называется равномерным. Число кодовых комбинаций равномерного кода

$$N=m^n, \quad (1.8)$$

где  $m$  — основание кода;  $n$  — число разрядов в кодовой комбинации.

Неравномерные коды характеризуются различным числом символов в кодовых комбинациях. Примеры построения таких кодов будут приведены в гл. 4.

Каждую букву ансамбля  $\{a_i\}$  с объемом  $K$  можно закодировать при

$$N=m^n \geq K. \quad (1.9)$$

Если число кодовых комбинаций  $N=K$ , то код называется простым (примитивным). Число разрядов в кодовой комбинации равномерного примитивного кода

$$n = \log_m K = \log_2 K / \log_2 m. \quad (1.10)$$

Если же число кодовых комбинаций  $N > K$ , то код называется корректирующим. Принципы построения и свойства таких кодов будут рассмотрены в гл. 5.

При кодировании отдельным символам источника сообщений удобно поставить в соответствие целые числа от 0 до  $K-1$ .

Любое целое число  $M$  может быть представлено в системе счисления с основанием  $m$ :

$$M = b_{n-1} m^{n-1} + b_{n-2} m^{n-2} + \dots + b_1 m^1 + b_0 m^0. \quad (1.11)$$

Коэффициенты  $b_i$  принимают значения от 0 до  $m-1$ . Их совокупность и есть кодовая комбинация для символа  $a_i$ , которому поставлен в соответствие номер  $M_i$ :

$$a_i \Rightarrow M_i \Rightarrow (b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0).$$

Декодирование состоит в восстановлении сообщения по принимаемым кодовым символам.

## Задачи

1.2.1. Источник сообщений выдает символы из ансамбля, имеющего объем  $K=8$ . Записать кодовые комбинации примитивного равномерного двоичного кода, соответствующие символам данного источника. Построить граф кода (кодовое дерево).

1.2.2. Какое число разрядов должен иметь равномерный примитивный код, предназначенный для кодирования 32-буквенного алфавита, при основании кода  $m=2; 8; 16; 32$ ?

1.2.3. Дискретный источник выдает символы из ансамбля  $\{a_i\}$  с объемом  $K=10$ . Какое минимальное число разрядов должны иметь кодовые комбинации равномерного двоичного кода, предназначенного для кодирования символов заданного ансамбля? Записать кодовые комбинации. Будет ли полученный код примитивным?

1.2.4. Первичный непрерывный сигнал путем дискретизации во времени и квантования по уровню превращается в импульсную последовательность с числом уровней  $K=128$ . Уровни квантованного сигнала кодируются равномерным двоичным примитивным кодом. Найти число разрядов в кодовой комбинации.

1.2.5. Какое наименьшее число разрядов должны иметь кодовые комбинации двоичного и восьмеричного кодов, предназначенных для кодирования сообщений алфавита, имеющего объем  $K=16; 128; 57; 10; 432$ ?

1.2.6. Закодировать двоичным кодом следующие числа: 5; 7; 17; 31; 32; 33; 127; 128; 129.

1.2.7. Сообщения, выбираемые из ансамблей, имеющих объем  $K=8; 9; 16; 17; 32; 33; 256; 260$ , кодируются равномерным кодом с основанием  $m=2; 3$ . В каких случаях величина  $n=\log_2 K / \log_2 m$  будет точно выражать длину кодовой комбинации?

1.2.8. Чему должен быть равен объем алфавита  $K$ , который можно закодировать равномерным примитивным кодом с основанием  $m=2; 3; 8$  и  $n=2; 3; 5$ ?

1.2.9. Технической скоростью передачи  $v$  называется количество кодовых символов, передаваемых в единицу времени. Определить техническую скорость передачи для стартстопного телеграфного аппарата, передающего одну букву семью послылками: стартовой (20 мс), пятью кодовыми (20 мс каждая) и одной стоповой (30 мс).

1.2.10. Кодовые символы передаются послылками постоянного тока, имеющими длительность 5 мс. Чему равна техническая скорость передачи?

1.2.11. Какую длительность должны иметь кодовые послылки при технической скорости 50, 100, 200 Бод? (1 Бод соответствует передаче одной послылки в секунду).

1.2.12. Буквам русского алфавита А, В, Е, К, О, М, С соответствуют следующие кодовые комбинации 5-разрядного двоичного кода: 00000, 00011, 00101, 01001, 01011, 01100, 01111. Расшифруйте кодовые последовательности:

- 1) 011000101101111010010001100000;
- 2) 0111100101010010000001100;
- 3) 0110000000011110100100000.

## 1.3. МОДУЛЯЦИЯ

При модуляции параметр переносчика (несущей)  $f(k, l, \dots, t)$  меняется по закону первичного сигнала  $b(t)$ .

При гармонической несущей на практике применяется амплитудная модуляция (АМ). Сигнал АМ

$$u_{\text{АМ}}(t) = [U_0 + k_{\text{А}} b(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.12)$$

где  $U_0, \omega_0, \varphi_0$  — амплитуда, частота и начальная фаза несущей;  $k_{\text{А}}$  — крутизна модуляционной характеристики.

Сигнал балансной модуляции (БМ-сигнал)

$$u_{\text{БМ}}(t) = k_{\text{БМ}} b(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.13)$$

Сигнал однополосной модуляции (ОМ-сигнал)

$$u_{\text{ОМ}}(t) = k_{\text{ОМ}} b(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \pm k_{\text{ОМ}} \tilde{b}(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.14)$$

где  $\tilde{b}(t)$  — сигнал, сопряженный с  $b(t)$  по Гильберту (у него все частотные компоненты сдвинуты на  $90^\circ$ ). Знак « $\rightarrow$ » в (1.14) соответствует системе ОМ с верхней боковой полосой, знак « $+$ » — системе ОМ с нижней боковой полосой.

Сигнал фазовой модуляции (ФМ-сигнал)

$$u_{\text{ФМ}}(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + k_{\text{ФМ}} b(t) + \varphi_0]. \quad (1.15)$$

Сигнал частотной (интегральной) модуляции (ЧМ-сигнал)

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_0 \cos \left[ \omega_0 t + k_{\text{ЧМ}} \int_0^t b(x) dx + \varphi_0 \right]. \quad (1.16)$$

На практике применяются системы с двойной модуляцией, чаще всего системы ОМ — АМ, ФМ — АМ, ЧМ — АМ, ЧМ — ОМ, ОМ — ЧМ, ЧМ — ЧМ и др. Если несущая модулируется дискретным сообщением, то говорят о дискретной модуляции. Кроме дискретной АМ, ФМ, ЧМ, используется система относительной фазовой модуляции (ОФМ).

В отличие от ФМ при ОФМ фаза сигналов отсчитывается не от некоторого эталона, а от фазы предыдущего элемента сигнала. При передаче двоичных сообщений символ 0 передается, например, отрезком синусоиды с начальной фазой предыдущего элемента сигнала, а символ 1 — таким же отрезком с начальной фазой, отличающейся от начальной фазы предшествующего элемента сигнала на  $\pi$ .

В импульсных системах связи дискретные отсчеты  $b(k\Delta t)$  непрерывного сообщения передаются периодической последовательностью импульсов

$$j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k, \tau, \Delta \tau, t - kT), \quad (1.17)$$

где  $v(t)$  — функция, определяющая форму импульсов ( $0 \leq t \leq \tau$ );  $h$  — высота (амплитуда) импульсов;  $\tau$  — длительность;  $\Delta t$  — отклонение импульса относительно тактовой точки,  $T$  — период следования импульсов

### Задачи

1.3.1. Напишите выражение для сигнала в системе ОМ—ФМ (в нижней ступени модуляции используется нижняя или верхняя боковая полоса). Индексы 1 и 2 припишите параметрам соответственно первой и второй системы модуляции. Определите ширину полосы сигнала, если первая поднесущая  $f_1 = 100$  кГц, верхняя частота сообщения  $F_{\max} = 4$  кГц, а индекс модуляции во второй системе  $\beta_2 = 15$ .

1.3.2. Решить задачу 1.3.1 для числовых значений величин, заданных в табл. 1.9.

Таблица 1.9

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_1$ , кГц	40	100	300	400	300	80	100	200	300	60	100	50
$F_{\max}$ , кГц	5	2	8	10	2	2	8	6	6	7	6	2
$\beta_2$	14	8	9	10	16	8	9	12	18	17	12	14

1.3.3. Напишите выражение для сигнала в системе ФМ—АМ. Определите ширину полосы частот сигнала, если  $f_1 = 100$  кГц,  $F_{\max} = 4$  кГц, а индекс ФМ  $\beta_1 = 15$ .

1.3.4. Решите задачу 1.3.3 по данным, приведенным в табл. 1.10.

1.3.5. Напишите выражение для сигнала в системе ЧМ—ОМ (в верхней ступени используется нижняя боковая полоса). Определите ширину полосы частот сигнала, если  $F_{\max} = 4$  кГц, индекс ЧМ равен  $\beta_1 = 15$ .

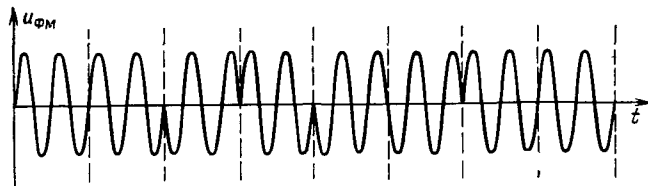
1.3.6. Напишите выражение для сигнала в системе ЧМ—ЧМ. Определите ширину полосы частот сигнала, если индексы модуляции  $\beta_1 = 10$ ,  $\beta_2 = 15$ ,  $f_1 = 100$  кГц,  $F_{\max} = 4$  кГц.

1.3.7. Решить задачу 1.3.6 для вариантов числовых значений величин, приведенных в табл. 1.10.

Таблица 1.10

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\beta_1$	9	8	7	5	8	10	8	6	6	7	6	5
$\beta_2$	7	7	8	9	9	10	9	9	8	7	9	8
$f_1$ , кГц	100	140	190	140	180	170	150	120	180	120	120	180
$F_{\max}$ , кГц	1	5	7	8	2	9	8	1	6	7	8	6

Рис. 1.4. Реализация сигнала двоичной фазовой (относительной фазовой) модуляции



1.3.8. На рис. 1.4 дана реализация сигнала при двоичной ФМ, содержащей 8 кодовых элементов. Напишите двоичный код, соответствующий этой реализации. Считаем, что первый элемент соответствует символу 1.

1.3.9. Нарисуйте реализацию сигнала при двоичной АМ с пассивной паузой (символ 0 передается отсутствием излучения), соответствующую коду 10111001.

1.3.10. Решить задачу 1.3.9 для следующих кодовых комбинаций:

- 1) 10101101;
- 2) 11000101;
- 3) 10111011;
- 4) 11111000;
- 5) 00011001;
- 6) 11110001;
- 7) 00110011;
- 8) 01010101;
- 9) 00011100;
- 10) 10000001;
- 11) 01111110;
- 12) 00111110.

1.3.11. Приняв, что на рис. 1.4 дана реализация сигнала при двоичной ОФМ, восстановите код, соответствующий этому сигналу, если: а) символ 1 передается сменой фазы предыдущего элемента сигнала, а символ 0 — сигналом с той же фазой; б) символ 0 передается сменой фазы предыдущего элемента сигнала, а символ 1 — сигналом с той же фазой.

1.3.12. Определите полосу частот, необходимую для передачи сигнала при импульсной модуляции, если считать, что несущая образована последовательностью прямоугольных импульсов длительностью  $\tau = 1$  мкс, а ширина спектра определяется тремя первыми лепестками функции  $\left| \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \right|$ .

1.3.13. Решите задачу 1.3.12 для значений  $\tau$ , приведенных в табл. 1.11.

Таблица 1.11

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tau$ , мкс	5	2	10	8	20	40	90	60	30	70	6	4

1.3.14. Напишите выражение для сигнала АИМ—БМ. Какая полоса частот требуется для его передачи, если ширину спектра сигнала АИМ брать такую же как в задаче 1.3.12.

1.3.15. Напишите выражение для сигнала ФИМ—БМ. Имеет ли различие в ширине спектра сигналов АИМ—БМ и ФИМ—БМ?

1.3.16. Найдите коэффициенты частотной избыточности для систем ОМ, БМ, ФМ, ЧМ (при заданном индексе модуляции  $\beta$  и  $F_{\text{макс}}$ ), АИМ и ФМ (при заданной длительности импульсов несущей), ОМ—ЧМ и ЧМ—ЧМ.

## Глава 2. СООБЩЕНИЯ, СИГНАЛЫ, ПОМЕХИ

### 2.1. СООБЩЕНИЯ, СИГНАЛЫ И ПОМЕХИ КАК СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Как сообщения, так и сигналы во многих случаях отображаются дискретными (по уровням) процессами с дискретным временем (случайные последовательности). Их называют дискретными случайными процессами с элементами  $A(t_k)$ , которые могут принимать  $K$  различных значений  $a_1, a_2, \dots, a_K$ .

Вероятность реализации отрезка (цепочки) дискретного случайного процесса с  $n$  элементами можно записать

$$P(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}) = P(a_{i_1})P(a_{i_2}|a_{i_1})P(a_{i_3}|a_{i_1}, a_{i_2}) \dots P(a_{i_n}|a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{(n-1)}}), \quad (2.1)$$

где  $P(a_{i_n}|a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_{(n-1)}})$  — условная вероятность появления элемента  $a_{i_n}$  в момент  $t_n$  при условии, что в предыдущие моменты  $t_{n-1}, \dots, t_1$  осуществлялась реализация отрезка (цепочка)  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{(n-1)}}$ ;  $A(t_k) = a_{i_k}$  — реализация символа в момент  $t_k$ ;  $i$  — значение элемента;  $k$  — момент времени (номер символа в цепочке).

Если отдельные символы цепочки появляются независимо (последовательность Бернулли),

$$P(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) = \prod_{k=1}^n P(a_{i_k}), \quad (2.2)$$

где  $P(a_{i_k})$  — безусловная вероятность появления символа  $a_{i_k}$ .

Важным видом случайной последовательности зависимых элементов является цепь Маркова. Для простой цепи Маркова условная вероятность появления некоторого элемента  $a_{i_k}$  целиком определена, если известен предыдущий элемент  $a_{i_{(k-1)}}$ , т. е.

$$P(a_{i_k}|a_{i_1}, \dots, a_{i_{(k-1)}}) = P(a_{i_k}|a_{i_{(k-1)}}). \quad (2.3)$$

Непрерывный случайный сигнал (процесс)  $X(t)$  с дискретным временем  $t_k$  полностью определен в  $n$  точках (сечениях), если известна  $n$ -мерная интегральная функция распределения:

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\}, \quad (2.4)$$

где  $P\{ \}$  обозначает совместную вероятность событий, записанных в скобках,  $X(t_k)$  представляет собой случайную величину и называется сечением случайного процесса в момент  $t_k$ .

Частные производные функции распределения по всем  $x_k$  определяют  $n$ -мерную плотность вероятности

$$w_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \quad (2.5)$$

Марковская случайная последовательность обладает тем свойством, что при известном значении  $X(t_{k-1}) = x_{k-1}$  вероятность значения  $X(t_k)$  ( $t_k > t_{k-1}$ ) не зависит от значений процесса в любые более ранние моменты времени:

$$P(x_k, t_k | x_1, x_2, \dots, x_{k-1}; t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) = P(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1}). \quad (2.6)$$

Непрерывный и случайный процесс задан полностью, если для любого  $n$  и любых моментов  $t_1, t_2, \dots, t_n$  в области его определения  $[0, T]$  можно найти функцию распределения. Математическое ожидание случайного процесса  $X(t)$  по ансамблю (или его среднее значение) определяется так:

$$M\{X(t)\} = \overline{X(t)} = m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x w_1(x, t) dx, \quad (2.7)$$

где  $w_1(x, t)$  — одномерная плотность вероятности для сечения. Математическое ожидание квадрата центрированного сигнала  $\dot{X}(t) = X(t) - \overline{X(t)}$  (дисперсия):

$$M\{\dot{X}^2(t)\} = \overline{\dot{X}^2(t)} = D\{X(t)\} = \sigma_x^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \overline{X(t)}]^2 w_1(x, t) dx. \quad (2.8)$$

Корреляционная функция случайного сигнала

$$B_x(t_1, t_2) = \overline{\dot{X}(t_1) \dot{X}(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \overline{X(t_1)}] [x_2 - \overline{X(t_2)}] w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (2.9)$$

где  $w_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$  — двумерная плотность вероятности для сечений  $X(t)$  в моменты  $t_1$  и  $t_2$ . Иногда корреляционную функцию определяют без центрирования, тогда корреляционную функцию, определенную с центрированием, называют функцией ковариации.

Случайный процесс, у которого математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция зависит от разности  $t_2 - t_1 = \tau$ , но не от самих значений  $t_1$  и  $t_2$ , называется стационарным (в широком смысле).

Для стационарного случайного процесса  $|B_x(\tau)| \leq \sigma_x^2 = B_x(0)$ . Нормированная корреляционная функция (коэффициент корреляции) стационарного процесса  $R_x(\tau) = B_x(\tau)/\sigma_x^2$ . Интервал корреляции стационарного случайного процесса часто определяют по методу эквивалентного прямоугольника формулой

$$\tau_K = \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau. \quad (2.10)$$

Для стационарных эргодических процессов с вероятностью, близкой к 1, математическое ожидание по ансамблю равно среднему значению во времени одной реализации процесса:

$$m_x = \overline{X(t)} \approx \overline{\tilde{x}(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt; \quad (2.11)$$

$$\sigma^2 = \overline{X^2(t)} - \overline{X(t)}^2 \approx \overline{\tilde{x}^2(t)} - \overline{\tilde{x}(t)}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \overline{\tilde{x}(t)}]^2 dt; \quad (2.12)$$

$$B_x(\tau) = \overline{\dot{X}(t) \dot{X}(t+\tau)} \approx \overline{\dot{\tilde{x}}(t) \dot{\tilde{x}}(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \overline{\tilde{x}(t)}][x(t+\tau) - \overline{\tilde{x}(t+\tau)}] dt. \quad (2.13)$$

Для непрерывного (скалярного) марковского процесса диффузионного типа двумерная плотность вероятности перехода  $w_2(x, t|x_0, t_0) = w_2(X(t)|X_0(t_0))$ ,  $t > t_0$  и одномерная безусловная плотность вероятности  $w_1(x, t)$  удовлетворяют одному и тому же уравнению в частных производных Колмогорова — Фоккера — Планка:

$$\frac{\partial w_2(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = \frac{\partial [A_1(x, t) w_2(x, t|x_0, t_0)]}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [A_2(x, t) w_2(x, t|x_0, t_0)]}{\partial x^2}; \quad w_2(x, t|x_0, t_0) = \delta(x - x_0). \quad (2.14)$$

Коэффициенты сноса  $A_1(x, t)$  и диффузии  $A_2(x, t)$  определяются как условные математические ожидания:

$$A_1(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \overline{[X(t+\Delta t) - X(t)]|x(t)}, \quad (2.15)$$

$$A_2(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \overline{\{[X(t+\Delta t) - X(t)]^2|x(t)\}}.$$

Для стационарного марковского процесса коэффициенты сноса и диффузии не зависят от времени:

$$A_1(x, t) = A_1(x), \quad A_2(x, t) = A_2(x), \quad (2.16)$$

стационарная плотность

$$w(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} w(x, t) \quad (2.17)$$

и может быть найдена согласно (2.14) из уравнения

$$\frac{d}{dx} [A_2(x) w(x)] = 2A_1(x) w(x) + const. \quad (2.18)$$

Общее решение (2.18) содержит две произвольные постоянные, которые определяются из условия нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1$  и граничного условия относительно  $w(x)$ , например

$$w(\infty) = w(-\infty) = 0. \quad (2.19)$$

Случайный процесс  $X(t)$  называется гауссовским, если его любая (при произ-

вольно выбранных сечениях)  $n$ -мерная плотность вероятности определяется формулой

$$w_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n D}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n v_{ik} (x_i - m_i) (x_k - m_k) \right], \quad (2.20)$$

где  $v_{ik}$  — элементы матрицы, обратной матрице корреляции

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11}(t_1, t_1) & B_{12}(t_1, t_2) & \dots & B_{1n}(t_1, t_n) \\ B_{21}(t_2, t_1) & B_{22}(t_2, t_2) & \dots & B_{2n}(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1}(t_n, t_1) & B_{n2}(t_n, t_2) & \dots & B_{nn}(t_n, t_n) \end{bmatrix};$$

$D$  — определитель матрицы  $\mathbf{B}$ ;  $m_i = \overline{X(t_i)}$ .

Задачи

2.1.1. Дискретный двоичный источник выдает последовательности из трех символов  $A(t_1)$ ,  $A(t_2)$ ,  $A(t_3)$ . Возможные реализации источника имеют вероятности

$$\begin{aligned} P_1 &= P(0_1 0_2 0_3) = 0,1; & P_5 &= P(0_1 0_2 1_3) = 0,15; \\ P_2 &= P(0_1 0_2 0_3) = 0,2; & P_6 &= P(0_1 1_2 1_3) = 0,05; \\ P_3 &= P(1_1 0_2 0_3) = 0,05; & P_7 &= P(1_1 0_2 1_3) = 0,2; \\ P_4 &= P(1_1 1_2 0_3) = 0,15; & P_8 &= P(1_1 1_2 1_3) = 0,1. \end{aligned}$$

Найти: вероятности появления 2-символьных реализаций  $P(a_{i1} a_{i2})$  и  $P(a_{i2} a_{i3})$ ; безусловные вероятности  $P(a_{i1})$ ,  $P(a_{i2})$ ,  $P(a_{i3})$ ; условные вероятности переходов  $P(a_{i3}|a_{i1} a_{i2})$ ,  $P(a_{i1} a_{i2}|a_{i3})$ ,  $P(a_{i3}|a_{i2})$ ,  $P(a_{i2}|a_{i1})$ .

2.1.2. Решить задачу 2.1.1. для значений вероятностей 3-символьных реализаций, приведенных в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_1$	0,15	0,1	0,2	0,17	0,03	0,1	0,05	0,1	0,5	0,4	0,15	0,05
$P_2$	0,15	0,2	0,1	0,2	0,26	0,05	0,05	0,1	0,25	0,3	0,1	0,25
$P_3$	0,1	0,05	0,1	0,15	0,09	0,04	0,125	0,15	0,125	0,12	0,15	0,05
$P_4$	0,1	0,1	0,1	0,15	0,05	0,01	0,125	0,15	0,0625	0,06	0,2	0,2
$P_5$	0,15	0,2	0,3	0,1	0,16	0,2	0,175	0,2	0,0313	0,03	0,05	0,1
$P_6$	0,1	0,05	0,1	0,13	0,1	0,03	0,125	0,2	0,02	0,01	0,15	0,2
$P_7$	0,15	0,25	0,05	0,07	0,09	0,07	0,15	0,05	0,005	0,04	0,15	0,1
$P_8$	0,1	0,05	0,05	0,03	0,22	0,5	0,2	0,05	0,0062	0,04	0,05	0,05

2.1.3. Дискретный двоичный источник описывается простой цепью Маркова с матрицей переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} P(1|1) & P(1|0) \\ P(0|1) & P(0|0) \end{bmatrix},$$

где  $P(a_i|a_j)$  — вероятность символа  $a_i$  при условии, что ему предшествует символ  $a_j$ .

Написать вероятности для всех 3-символьных реализаций источника.

2.1.4. Символы двоичного дискретного источника появляются независимо от символов, ранее переданных ( $P(a_i|a_j) = P(a_i)$  — источник без памяти), причем  $P(1) = 0,8$ ;  $P(0) = 0,2$ . Написать вероятности для всех реализаций 3-символьных сочетаний источника.

2.1.5. Решить задачу 2.1.4 для значений вероятностей символов  $P(1)$  и  $P(0)$ , приведенных в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(1)$	0,75	0,7	0,62	0,4	0,35	0,41	0,5	0,8	0,36	0,17	0,25	0,38
$P(0)$	0,25	0,3	0,38	0,6	0,65	0,59	0,5	0,2	0,63	0,83	0,75	0,62

2.1.6. Символы двоичного источника передаются с равной вероятностью и независимо. Во сколько раз уменьшается вероятность реализации цепочки из  $(n+2)$  символов по сравнению с вероятностью реализации  $n$ -элементной цепочки?

2.1.7. Одномерная интегральная функция распределения амплитуды сигнала при замираниях определяется формулой  $F(U, t) = 1 - \exp(-U^2/\overline{U^2})$ . Найти плотность вероятности амплитуды. Является ли процесс  $U(t)$  стационарным?

2.1.8. Интегральная функция совместного распределения амплитуд флуктуационной помехи в двух сечениях  $t_1$  и  $t_2$  определяется выражением

$$F_2(U_1, U_2; t_1, t_2) = \{1 - \exp[-U_1^2/\overline{U_1^2}(t)]\} \{1 - \exp[-U_2^2/\overline{U_2^2}(t)]\}, U_1 > 0, U_2 > 0.$$

Покажите, что  $F_2(\infty, U_2, t_2) = F_1(U_2, t_2)$ ;  $F_2(U_1, \infty, t_1) = F_1(U_1, t_1)$ . Найдите совместную плотность вероятности помехи в двух сечениях. Покажите, что эти сечения независимы.

2.1.9. Совместная плотность вероятности мгновенных значений шума в двух сечениях  $t_1$  и  $t_2 = t_1 + \tau$  определяется гауссовским законом:

$$\omega(n_1, n_2; \tau) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \sigma_1^2(t) \sigma_2^2(t) [1 - R^2(\tau)]}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2[1 - R^2(\tau)]} \left[ \frac{n_1^2(t)}{\sigma_1^2(t)} + \frac{n_2^2(t)}{\sigma_2^2(t)} - \frac{2R(\tau) n_1(t) n_2(t)}{\sigma_1(t) \sigma_2(t)} \right] \right\},$$

где  $R(\tau)$  — нормированная корреляционная функция сечений;  $\sigma_1^2(t)$ ,  $\sigma_2^2(t)$  — соответственно дисперсии процесса в первом и втором сечениях.

Покажите, что в каждом сечении распределение гауссовское и при  $\tau = 0$  случайный процесс независим в двух сечениях.

2.1.10. Напишите совместную плотность двух сечений процесса  $Z(t) = s(t) + N(t)$  (сигнал + шум) при условии, что сигнал детерминирован, а шум имеет гауссовское распределение.

2.1.11. Покажите, что для гауссовского процесса (см. задачу 2.1.9) распределение  $n_2$  при известном  $n_1$  определяется гауссовским законом:

$$\omega(n_2|n_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2(1 - R^2(\tau))}} \exp \left[ -\frac{\left( n_2 - n_1 R(\tau) \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2}{2\sigma_2^2 [1 - R^2(\tau)]} \right].$$

Как модифицируется этот закон, если  $R(\tau) = 0$  и  $R(\tau) = \pm 1$ ? Учтеь одно из определений  $\delta$ -функции:

$$\delta(x - a) = \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{(x - a)^2}{2\sigma^2} \right].$$

2.1.12. Полагая, что гауссовский процесс является марковским, написать совместную плотность вероятности трех сечений процесса.

2.1.13. Сечение дискретного случайного процесса при многоуровневой модуляции принимает пять значений:  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 1$ ;  $x_3 = 0$ ;  $x_4 = 1$ ;  $x_5 = 2$  с вероятностями  $P(x_1) = P(x_5) = 0,1$ ;  $P(x_2) = P(x_4) = 0,2$ ;  $P(x_3) = 0,4$ . Найти математическое ожидание и дисперсию сечения процесса.

2.1.14. Решить задачу 2.1.13 для распределений вероятностей, приведенных в табл. 2.3.

2.1.15. Случайный узкополосный процесс определяется на интервале  $(-T/2, T/2)$  выражением  $Z(t) = X(t) \cos \omega_0 t + Y(t) \sin \omega_0 t$ , где  $X(t)$ ,  $Y(t)$  — независимые стационарные гауссовские случайные процессы с параметрами  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_y^2$ ,  $R_x(\tau) = R_y(\tau) = R(\tau)$ ;  $f_0$  — средняя частота спектра;  $F \ll f_0$  — граничная частота энергетического спектра процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$ . Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию процесса  $Z(t)$ . Доказать, что процесс  $Z(t)$  стационарен лишь при  $m_x = m_y = 0$ ,  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ .

2.1.16. В условиях стационарности процесса  $Z(t)$  из задачи 2.1.15 найти параметры  $m_z$ ,  $\sigma_z^2$ ,  $R_z(\tau)$  усреднением по времени

Таблица 2.3

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_1$	0,1	0,15	0,35	0,1	0,1	0,2	0,25	0,13	0,1	0,1	0,05	0,4
$P_2$	0,1	0,05	0,2	0,1	0,4	0,2	0,25	0,17	0,3	0,1	0,4	0,05
$P_3$	0,2	0,25	0,25	0,1	0,4	0,2	0,1	0,15	0,1	0,5	0,4	0,4
$P_4$	0,3	0,25	0,1	0,1	0,05	0,2	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0,1
$P_5$	0,3	0,3	0,1	0,6	0,05	0,2	0,3	0,3	0,2	0,1	0,05	0,05



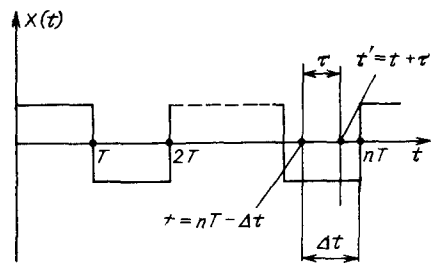


Рис 2.1 Реализация случайного синхронного телеграфного сигнала

и доказать, что они совпадают со значениями, полученными усреднением по ансамблю.

2.1.17. Найти корреляционную функцию случайного синхронного телеграфного сигнала, реализации которого имеют случайный равномерно распределенный сдвиг  $\Delta t$  относительно начала координат (рис. 2.1), принимающего в дискретные моменты времени, кратные  $T$ , значения  $\pm h$  с

вероятностью 0,5 независимо от того, какое значение он имел на предыдущем участке. Определить интервал корреляции этого процесса.

2.1.18. Стационарный случайный сигнал имеет корреляционную функцию  $B(\tau) = B(0) \exp(-\beta|\tau|)$ ,  $\beta = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ . Найти интервал корреляции  $\tau_k$  методом эквивалентного прямоугольника, а также определив его как аргумент  $\tau$ , при котором  $B(\tau) = 0,1B(0)$ .

2.1.19. Решить задачу 2.1.18 для числовых значений величин, заданных в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\beta, \text{ с}^{-1}$	0,01	0,1	0,02	0,04	0,08	0,06	0,06	0,02	0,08	0,08	0,08	0,02
$B(\tau)/B(0)$	0,01	0,2	0,01	0,01	0,15	0,05	0,1	0,1	0,05	0,07	0,02	0,01

2.1.20. Неопределенный интеграл  $W(t) = \int N(t) dt$  от стационарного процесса  $N(t)$  с равномерным энергетическим спектром ( $B_N(t_1, t_2) = \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1)$ ) и нулевым математическим ожиданием ( $\overline{N(t)} = 0$ ) называется процессом Винера. Докажите, что этот процесс нестационарен и имеет математическое ожидание  $\overline{W(t)} = 0$ , корреляционную функцию  $B_w(t_1, t_2) = N_0 \min[t_1, t_2]/2$  и дисперсию  $\sigma_w^2(t_1) = N_0 t_1/2$ .

2.1.21. Пользуясь тем, что корреляционная функция производной дифференцируемого (в среднеквадратическом) случайного процесса  $X(t)$  равна  $B_x^*(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 B_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$ , найти корреляционную функцию производной винеровского процесса.

2.1.22. Стационарный случайный процесс имеет корреляционную функцию  $B(\tau) = B(0) \exp(-\beta^2 \tau^2)$ ,  $\beta = 10^{-2} \text{ с}^{-2}$ . Найти интервал корреляции  $\tau_k$  методом эквивалентного прямоугольника, определив его как аргумент  $\tau$ , при котором  $B(\tau) = 0,1B(0)$ .

2.1.23. Решить задачу 2.1.22 для числовых значений, заданных в табл. 2.4.

2.1.24. Найти усредненную по времени корреляционную функцию АМ-сигнала  $u_{AM}(t) = [U_m + k_{AM} \dot{X}(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ , если  $\dot{X}(t)$  — стационарный случайный процесс с корреляционной функцией  $B_x(t)$ .

2.1.25. Найти усредненную по времени корреляционную функцию ОМ-сигнала  $u_{OM}(t) = \dot{X}(t) \cos \omega_0 t + \dot{X}(t) \sin \omega_0 t$ , где  $\dot{X}(t)$  — сопряжение по Гильберту от  $\dot{X}(t)$ ;  $\dot{X}(t)$  — стационарный случайный процесс с корреляционной функцией  $B_x(\tau)$ .

2.1.26. Найти усредненную по времени корреляционную функцию ФМ-сигнала  $u_{FM}(t) = U_m \cos[\omega_0 t + k_{FM} \dot{X}(t)]$ , где  $\dot{X}(t)$  — стационарный гауссовский случайный процесс с корреляционной функцией

$$B_x(\tau) = B_x(0) R_x(\tau).$$

2.1.27. Показать, что для синхронного телеграфного сигнала (рис. 2.1) математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция, найденные усреднением по времени, совпадают с характеристиками, полученными в 2.1.17.

2.1.28. Показать, что нестационарная гауссовская плотность вероятности случайного процесса  $x(t)$  с математическим ожиданием  $m_x(t) = x_0 e^{-at}$  и дисперсией  $\sigma_x^2(t) = \sigma^2(1 - e^{-2at})$ ,  $a > 0$  удовлетворяет уравнению Колмогорова — Фоккера — Планка (2.14) при коэффициентах сноса  $A_1(t) = -am_x(t)$  и диффузии  $A_2(t) = 2\sigma^2/a$ .

2.1.29. В условиях предыдущей задачи, пользуясь уравнением (2.18), показать, что стационарная плотность вероятности

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

2.1.30. Покажите, что гауссовская плотность вероятности перехода  $w(n_2, t/n_1, t-\tau)$  из задачи 2.1.9, в стационарном случае ( $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ) удовлетворяющая граничному условию  $w(n_2, 0/n_1, 0) = \delta(n_2 - n_1)$ , удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка (2.14) с коэффициентом сноса  $A_1(t) = -am_x(t)$  и диффузии  $A_2(t) = 2\sigma^2/a$  только при выполнении условия

$$R'(\tau) = R(\tau) R'(0_+), R_-(0) = 1, \quad (2.21)$$

где  $R'(0_+)$  — значение производной  $R(\tau)$  при приближении к нулю справа. Может ли существовать решение (может ли существовать непрерывный стационарный марковский гауссовский процесс) в случае, когда нормированная корреляционная функция  $R(\tau)$  непрерывна в точке  $\tau = 0$ ?

2.1.31. Докажите, что единственным решением уравнения (2.21) является функция  $R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$ ,  $\alpha = -R'(0_+)$ , т. е. что стационарный гауссовский процесс с экспоненциальной корреляционной функцией является непрерывным марковским процессом.

## 2.2. СПЕКТРЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Спектральная плотность мощности  $G(f)$  (энергетический спектр) случайного процесса определяет распределение средней мощности процесса по частоте. Односторонняя спектральная плотность мощности, заданная при  $f \geq 0$ ,  $G_0(f) = 2G(f)$ .

Средняя мощность процесса (дисперсия)

$$P_x = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) df = \int_0^{\infty} G_0(f) df. \quad (2.22)$$

Спектральная плотность мощности центрированного стационарного случайного процесса  $\dot{X}(t)$  является преобразованием Фурье от корреляционной функции:

$$G_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (2.23)$$

Отсюда

$$B_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) e^{j2\pi f\tau} df. \quad (2.24)$$

Пара преобразований Фурье связывает также усредненную по времени корреляционную функцию нестационарного процесса  $\dot{R}_x(\tau)$  и его усредненный энергетический спектр  $\dot{G}_x(f)$ . Ширину энергетического спектра часто определяют по методу эквивалентного прямоугольника:

$$F_\Delta = \frac{\int_0^{\infty} G_0(f) df}{G_{0 \text{ макс}}} = \frac{B_x(0)}{G_{0 \text{ макс}}}. \quad (2.25)$$

Произведение интервала корреляции  $\tau_k$  и ширины энергетического спектра  $F_\Delta$  случайного процесса удовлетворяет соотношению

$$\tau_k F_\Delta \approx 1. \quad (2.26)$$

### Задачи

2.2.1. Найти энергетический спектр случайного синхронного телеграфного сигнала (см. задачу 2.1.17). Определить ширину энергетического спектра  $F_\Delta$  и убедиться, что  $\tau_k F_\Delta \approx 1$ .

2.2.2. Случайный стационарный процесс имеет равномерный энергетический спектр  $G(f) = N_0/2$  (белый шум). Показать, что корреляционная функция этого процесса есть  $\delta$ -функция, а его дисперсия  $\sigma^2 = B(0) = \infty$ . Учесть соотношение  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi f\tau) df = \delta(\tau)$ .

2.2.3. Найти корреляционную функцию шума, имеющего равномерную спектральную плотность, равную  $N_0/2$  в полосе  $(-F, +F)$  и нулю вне этой полосы. Показать, что сечения процесса,

разнесенные на интервал  $\tau$ , кратный величине  $1/2F$ , не коррелированы. Найти  $F_\Delta$  и интервал корреляции  $\tau_k$ .

2.2.4. Найти энергетический спектр стационарного марковского гауссовского шума с экспоненциальной корреляционной функцией  $B(\tau) = B(0)e^{-\beta|\tau|}$ . Найти ширину энергетического спектра  $F_\Delta$  и оценить величину  $\tau_k F_\Delta$ .

2.2.5. Найти энергетический спектр для стационарного случайного процесса с гауссовской корреляционной функцией (задача 2.1.22) и его ширину  $F_\Delta$ . Оценить величину  $\tau_k F_\Delta$ .

2.2.6. Показать, что энергетический спектр случайного стационарного процесса  $Y(t)$  с корреляционной функцией  $B_y(\tau) = B_x(\tau) \cos \omega_0 \tau$  определяется на положительных частотах при  $f_0 \gg F_\Delta$  ( $F_\Delta$  — ширина спектра процесса с корреляционной функцией  $B_x(\tau)$ ) соотношением

$$G_y(f)_0 = G_x(f - f_0),$$

где  $G_x(f)$  — энергетический спектр процесса  $X(t)$ .

2.2.7. Найти усредненный энергетический спектр АМ-сигнала (задача 2.1.24).

2.2.8. Найти усредненный энергетический спектр ОМ-сигнала (задача 2.1.25).

2.2.9. Найти усредненный энергетический спектр ФМ-сигнала (задача 2.1.26). Упростить это выражение при  $k^2_{\text{ФМ}} B_x(0) \gg 1$ .

2.2.10. Гармоническая несущая промодулирована по амплитуде двоичным случайным синхронным телеграфным сигналом (задача 2.1.17). Найти усредненную во времени корреляционную функцию и энергетический спектр АМ-сигнала.

2.2.11. Случайный синхронный телеграфный сигнал модулирует по частоте гармоническую несущую. Найти усредненную корреляционную функцию и энергетический спектр, пользуясь представлением сигнала двоичной ЧМ как суммы двух АМ-сигналов (первый АМ-сигнал имеет паузы при передаче символа 0, а второй — 1).

## 2.3. ОГИБАЮЩАЯ, МГНОВЕННАЯ ФАЗА И ЧАСТОТА УЗКОПОЛОСНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Узкополосный случайный процесс  $Z(t)$  или любую его реализацию можно представить в виде

$$z(t) = r(t) \cos \psi(t), \quad (2.27)$$

где  $\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$  — мгновенная фаза;  $\omega_0 = 2\pi f_0$  — частота в полосе усредненно-определенного на положительных частотах энергетического спектра процесса;  $r(t)$  и  $\varphi(t)$  — огибающая и мгновенная начальная фаза, которые являются медленно меняющимися по сравнению с  $\cos \omega_0 t$  функциями.

\* Процесс называется узкополосным, если для него выполняется условие  $f_0 \gg F_\Delta$  ( $f_0$  — средняя частота спектра).

Процесс (2.27) можно представить в виде

$$z(t) = x(t) \cos \omega_0 t + y(t) \sin \omega_0 t, \quad (2.28)$$

где  $x(t)$  и  $y(t)$  — квадратурные компоненты, определяемые соотношениями,

$$x(t) = r(t) \cos \varphi(t); \quad y(t) = r(t) \sin \varphi(t). \quad (2.29)$$

Огибающую  $r(t)$  и фазу  $\varphi(t)$  можно определить по квадратурным компонентам:

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}; \quad \varphi(t) = \operatorname{arctg} y(t)/x(t). \quad (2.30)$$

Квадратурные компоненты процесса  $z(t)$  можно представить как вещественную и мнимую составляющие комплексной функции

$$\dot{z}(t) = r(t) e^{j\varphi(t)} = x(t) + j y(t). \quad (2.31)$$

Функция  $\dot{z}(t)$  называется комплексной огибающей процесса. Комплексный процесс  $\dot{z}(t)$  можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{r}(t) e^{j 2\pi f_0 t} = r(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] + j r(t) \sin [\omega_0 t + \varphi(t)] = \\ &= z(t) + j \tilde{z}(t), \end{aligned} \quad (2.32)$$

где  $\tilde{z}(t)$  — процесс, сопряженный процессу  $z(t)$ .

Мгновенная частота процесса  $z(t)$  определяется соотношением

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (2.33)$$

Используя пару преобразований Гильберта

$$\tilde{z}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z(\tau)}{t - \tau} d\tau; \quad z(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{z}(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (2.34)$$

огибающую и мгновенную фазу сигнала можно определить так:

$$r(t) = \sqrt{z^2(t) + \tilde{z}^2(t)}, \quad \psi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\tilde{z}(t)}{z(t)}. \quad (2.35)$$

При определении огибающей и фазы по Гильберту нет необходимости задавать частоту процесса  $f_0$ . Спектр по Фурье сопряженного сигнала  $S_z(j\omega)$  связан со спектром  $S_z(j\omega)$  соотношением

$$S_{\tilde{z}}(j\omega) = \begin{cases} j S_z(j\omega) & \text{при } f < 0, \\ -j S_z(j\omega) & \text{при } f > 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Отсюда следует, что спектр комплексного сигнала  $\dot{z}(t)$  существует только на положительных частотах, причем

$$z(t) = 2 \int_0^{\infty} S(j\omega) e^{j 2\pi f t} df. \quad (2.37)$$

Если узкополосный случайный процесс

$$Z(t) = X(t) \cos \omega_0 t + Y(t) \sin \omega_0 t = R(t) \cos (\omega_0 t + \Phi(t))$$

является гауссовским, а его квадратурные компоненты  $X(t)$  и  $Y(t)$  независимы, то совместная плотность вероятности квадратурных компонент

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x(t) \sigma_y(t)} \exp \left\{ -\frac{[x - m_x(t)]^2}{2\sigma_x^2(t)} - \frac{[y - m_y(t)]^2}{2\sigma_y^2(t)} \right\}. \quad (2.38)$$

Здесь  $m_x(t)$ ,  $m_y(t)$  — математические ожидания квадратурных компонент;  $\sigma_x^2(t)$ ,  $\sigma_y^2(t)$  — дисперсии квадратурных компонент.

Поскольку

$$X(t) = R(t) \cos \Phi(t), \quad Y(t) = R(t) \sin \Phi(t),$$

можно перейти от декартовых координат  $x$  и  $y$  к полярным координатам  $r$  и  $\varphi$  и определить совместную плотность вероятности огибающей и фазы узкополосного случайного процесса

$$\omega_2(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi \sigma_x(t) \sigma_y(t)} \exp \left\{ -\frac{(r \cos \varphi - m_x)^2}{2\sigma_x^2(t)} - \frac{(r \sin \varphi - m_y)^2}{2\sigma_y^2(t)} \right\}. \quad (2.39)$$

Отсюда легко найти одномерные плотности вероятности огибающей  $\omega_1(r)$  и фазы  $\omega_1(\varphi)$ .

Конкретный вид одномерных плотностей вероятности  $\omega_1(r)$  и  $\omega_1(\varphi)$  зависит от соотношения между параметрами квадратурных компонент случайного процесса.

### Задачи

2.3.1. Найти огибающую, мгновенную фазу и мгновенную частоту для БМ-сигнала

$$u(t) = U_m \cos (\omega_0 + \Omega) t + U_m \cos (\omega_0 - \Omega) t.$$

Составить выражение для комплексного сигнала.

2.3.2. Найти огибающую, мгновенную фазу и мгновенную частоту и составить выражение для комплексного сигнала, если процесс описывается выражением

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos \omega_0 t - \frac{1}{2} \beta U_m \cos (\omega_0 + \Omega) t + \\ &+ \frac{1}{2} \beta U_m \cos (\omega_0 - \Omega) t. \end{aligned}$$

2.3.3. Дан сигнал  $z(t) = \sum_{l=1}^L U_l \cos (\omega_0 t + \Omega_l) t$ . Найти сопряженный сигнал  $\tilde{z}(t)$ , а также огибающую, мгновенную фазу и частоту.

2.3.4. Найти квадратурные компоненты АМ-сигнала

$$u(t) = U_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos (\omega_0 t + \Phi_0).$$

2.3.5. Дан сигнал  $u(t) = U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t$ . Найти огибающую и мгновенную фазу сигнала для случаев  $\omega_0 = \omega_1$ ,  $\omega_0 =$

$= (\omega_1 + \omega_2)/2$ . Показать, что во втором случае огибающая совпадает с огибающей по Гильберту.

2.3.6. Найти огибающую и мгновенную фазу ОМ-сигнала при модуляции гармоническим колебанием  $\sin \Omega t$ .

2.3.7. Показать, что сигналы, сопряженные по Гильберту с сигналами  $z_1(t) = U_m \cos \omega_0 t$ ,  $z_2(t) = U_m \sin \omega_0 t$  ( $-T/2 \leq t \leq T/2$ ), равны  $\tilde{z}_1(t) = U_m \sin \omega_0 t$ ,  $\tilde{z}_2(t) = -U_m \cos \omega_0 t$  лишь при  $T \rightarrow \infty$ . Показать, что этот же результат следует из спектральных соотношений  $S_{\tilde{z}}(j\omega) = -S_z(j\omega)$  (при  $f > 0$ ).

2.3.8. Найти огибающую и мгновенную фазу по Гильберту для процесса  $z(t)$ , имеющего спектральную плотность

$$S_z(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } f_1 < f < f_2, \\ 0 & \text{при } f_2 < f < f_1. \end{cases}$$

2.3.9. Найти одномерную плотность вероятности огибающей узкополосного гауссовского случайного процесса, полагая, что квадратурные компоненты симметричны ( $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ ).

2.3.10. Найти одномерную плотность вероятности огибающей узкополосного гауссовского случайного процесса, если квадратурные компоненты симметричны ( $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ ) и  $m_x = m_y = 0$ .

2.3.11. Найти одномерную плотность вероятности огибающей узкополосного гауссовского случайного процесса, если  $\sigma_x^2 = 0$ ,  $m_x = m_y = 0$ .

2.3.12. Найти одномерную плотность вероятности фазы узкополосного гауссовского случайного процесса при условиях:

$$1) \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2, m_x = m_y \neq 0.$$

$$2) \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2, m_x = m_y = 0.$$

2.3.13. Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) эффективно следит за фазой входного процесса, если она не превышает величины  $\pi/n$  ( $n$  — целое число). Какова вероятность срыва слежения, если на вход системы ФАПЧ поступает узкополосный гауссовский шум, а  $n=2$ ?

2.3.14. Показать, что при  $\alpha_p/5 \gg 1$  обобщенное распределение Рэлея можно приближенно представить в виде

$$\omega_1(r) = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + \alpha_p^2}{2\sigma^2}\right) \sqrt{r/\alpha_p} (1 + \sigma^2/8 \alpha_p r).$$

2.3.15. Найти плотность вероятности огибающей суммы гармонического колебания с амплитудой  $U_0$  и узкополосного стационарного гауссовского процесса с дисперсией  $\sigma^2$ . Построить графики  $\omega(r)$  для  $U_0/\sigma = 0; 1; 2; 3$ .

2.3.16. Найти среднее значение и дисперсию напряжения  $u_{\text{нч}}$  на выходе идеального ФНЧ, подключенного к линейному детектору с характеристикой преобразования

$$u_{\text{вых}} = \begin{cases} ku_{\text{вх}} & \text{при } u_{\text{вх}} \geq 0, \\ 0 & \text{при } u_{\text{вх}} < 0, \end{cases}$$

если на вход детектора подается сумма гармонического сигнала с амплитудой  $U_m$  и узкополосного стационарного гауссовского шума с дисперсией  $\sigma^2$ .

## 2.4. ПРОСТРАНСТВА СООБЩЕНИЙ И СИГНАЛОВ

Во многих вопросах, связанных с приемом и преобразованием сигналов, весьма полезными оказываются геометрические представления различных функций (в дальнейшем будут рассматриваться только функции времени) в виде векторов некоторого пространства.

Любую совокупность  $n$  вещественных чисел  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  можно рассматривать как координаты точки в некотором  $n$ -мерном пространстве или координаты вектора  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  в этом пространстве.

Сумма двух векторов  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  и  $y = \{y_1, \dots, y_n\}$  дает вектор  $z = \{z_1, \dots, z_n\}$ , координаты которого равны сумме одноименных координат векторов-слагаемых:

$$z_i = x_i + y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.40)$$

Если элементы  $x_i, y_i, z_i$  принадлежат одному и тому же пространству, то это пространство относится к классу линейных.

Длина вектора в  $n$ -мерном пространстве (норма вектора) определяется соотношением

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (2.41)$$

Расстояние между векторами  $x$  и  $y$  определяется как норма их разности

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (2.42)$$

Скалярное произведение  $x$  и  $y$  есть число

$$(xy) = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (2.43)$$

Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то такие векторы называются ортогональными, а  $n$ -мерное пространство, в котором справедливы соотношения (2.40) — (2.43), называется евклидовым пространством и обозначается  $R_2$ .

Изложенные геометрические понятия используются в технике связи для наглядного представления сигналов и помех, которые характеризуются дискретной совокупностью координат. Такими координатами, в частности, могут быть котельниковские отсчеты или коэффициенты ряда Фурье.

Если функции (сигналы и помехи) задаются на непрерывном интервале  $(0, T)$ , то для их геометрического представления часто используют пространство, которое называется гильбертовым и обозначается  $L_2$ .

В пространстве  $L_2$  операции сложения и умножения задаются обычным образом, а скалярное произведение определяется соотношением

$$(x(t) y(t)) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t) dt. \quad (2.44)$$

Норма вектора в пространстве задается следующим образом:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}, \quad (2.45)$$

а расстояние между векторами

$$d(x, y) = \|x(t) - y(t)\| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - y(t))^2 dt}. \quad (2.46)$$

Ансамбль сигналов  $\{s_i(t)\}$  на интервале  $(0, T)$  можно представить в виде

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \varphi_j(t), \quad i = \overline{1, M}. \quad (2.47)$$

Здесь  $\{\varphi_i(t)\}$  — система ортонормированных базисных функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^T \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j; \end{cases} \quad (2.48)$$

$M$  — число сигналов в ансамбле (при  $M=2$  — сигналы двоичные, при  $M>2$  — сигналы многопозиционные);  $n$  — число измерений (отсчетов) сигнала на интервале  $T$ .

Коэффициенты разложения

$$a_{i,j} = \int_0^T s_i(t) \varphi_j(t) dt \quad (2.49)$$

представляют собой проекции  $i$ -го сигнала на  $j$ -ю базисную функцию.

Геометрически каждый сигнал ансамбля  $\{s_i(t)\}$  изображается точкой (вектором) в  $n$ -мерном пространстве с координатами  $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ . При  $n=1$  сигналы  $s_i(t)$  являются одномерными. Примером таких сигналов являются противоположные сигналы, которые изображаются двумя точками на одной прямой.

Сигналы, удовлетворяющие условию

$$\int_0^T s_i(t) s_j(t) dt = 0, \quad i \neq j, \quad (2.50)$$

называются ортогональными.

Если сигналы удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt &= 0 \quad \text{при } i \neq j, \\ \int_0^T s_i(t) \tilde{s}_j(t) dt &= 0 \quad \text{при любых } i, j, \end{aligned} \quad (2.51)$$

то они называются ортогональными в усиленном смысле. Двоичные сигналы (ортогональные в усиленном смысле) являются двумерными ( $n=2$ ). Они изображаются двумя ортогональными векторами на плоскости. Наиболее распространенными многопозиционными сигналами являются ортогональные, биортогональные и симплексные.

Биортогональные сигналы — совокупность сигналов, содержащая ортогональные сигналы и сигналы, противоположные им. Симплексные сигналы характеризуются одинаковыми расстояниями между собой. В  $n$ -мерном пространстве они образуют правильный симплекс, число вершин которого  $M=n+1$ .

Геометрическими представлениями можно пользоваться и в том случае, когда сигналы дискретны по уровням. Такие сигналы можно описать  $n$ -мерным вектором  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ , особенностью которого является то, что все его координаты могут принимать лишь дискретные значения, которые обозначают  $0, 1, 2, \dots, m-1$  ( $m$  — число дискретных состояний элемента сигнала). На рис. 2.2 в трехмерном пространстве показаны восемь векторов, соответствующих 3-разрядным двоичным комбинациям 000, 001, ..., 110, 111.

Операция сложения элементов дискретного пространства вводится таким образом, чтобы в итоге получились элементы, допустимые в данном пространстве. Для этого вводится операция сложения по модулю  $m$ . Например, при  $m=2$  правила суммирования

$$1 \oplus 1 = 0; \quad 1 \oplus 0 = 1; \quad (2.52)$$

$$0 \oplus 1 = 1; \quad 0 \oplus 0 = 0.$$

Расстояние между двоичными сигналами в  $n$ -мерных пространствах определяется чаще всего по Хеммингу:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i \oplus y_i), \quad (2.53)$$

т. е. его можно найти как результат сложения сумм по модулю 2 одноименных разрядов.

Геометрические представления справедливы и для случайных процессов с той разницей, что их координаты в соответствующих пространствах следует считать случайными числами, а сходимость сумм и интегралов понимается в среднем.

### Задачи

2.4.1. Финитный сигнал длительности  $T$  со спектром, ограниченным полосой  $F$ , представляется усеченным рядом Фурье

$$s(t) = \sum_{k=1}^L \left( \sqrt{2} a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + \sqrt{2} b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \right),$$

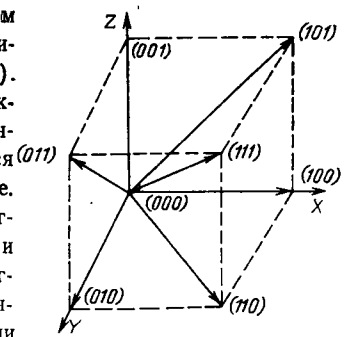


Рис. 2.2. Представление 3-разрядных двоичных сигналов в трехмерном пространстве

причем  $L=FT$ . Найти норму вектора, представляющего сигнал в  $2L$ -мерном пространстве Эвклида. Дать физическое толкование нормы этого вектора.

2.4.2. По условию задачи 2.4.1 найти норму вектора, представляющего сигнал  $s(t)$  в  $2L$ -мерном пространстве Эвклида для вариантов числовых значений, заданных в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$L$	4	5	2	5	5	4	3	3	5	5	2	3
$a_1$	4	9	4	8	7	5	2	8	0	2	2	8
$a_2$	6	2	0	5	8	8	7	8	2	2	1	4
$a_3$	6	8	—	5	1	9	1	7	8	8	—	9
$a_4$	1	9	—	1	4	4	—	5	4	—	—	2
$a_5$	7	7	2	8	5	3	5	1	7	9	2	9
$b_1$	6	7	5	8	1	6	9	6	7	3	6	8
$b_2$	7	7	—	1	1	5	—	8	1	6	—	6
$b_3$	5	2	—	0	6	4	—	—	1	4	—	—
$b_4$	—	1	—	—	—	—	—	—	2	1	—	—
$b_5$	—	8	—	—	5	—	—	—	3	5	—	—

2.4.3. Два ортогональных сигнала  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , имеющих одинаковые полосы частот  $F$  и длительности  $T$ , дискретизированы по Котельникову. Написать выражение для координат суммарного сигнала в пространстве Эвклида. Найти норму суммарного сигнала и выразить ее через нормы исходных сигналов в общем случае и в случае равных норм исходных сигналов. Определить расстояние между сигналами.

2.4.4. Два сигнала, заданных на интервале  $T$ , описываются выражениями

$$s_1(t) = \sqrt{2} a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + \sqrt{2} b_1 \sin \frac{2\pi}{T} t + \sqrt{2} a_3 \cos 3 \frac{2\pi}{T} t,$$

$$s_2(t) = \sqrt{2} a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + \sqrt{2} b_2 \sin 2 \frac{2\pi}{T} t + \sqrt{2} b_3 \sin 3 \frac{2\pi}{T} t.$$

Определить координаты этих сигналов в пятимерном пространстве Эвклида и вычислить скалярное произведение. Найти расстояние между сигналами  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ .

2.4.5. Решить задачу 2.4.4 для вариантов числовых значений, заданных в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a_1$	7	7	2	8	5	3	5	1	7	9	9	2
$a_2$	6	7	5	8	1	6	7	6	7	3	6	8
$b_1$	7	1	1	1	4	5	8	1	6	6	4	3
$b_2$	10	6	4	1	4	5	2	8	5	2	1	1
$b_3$	7	1	8	6	8	3	4	5	3	4	6	9

2.4.6. В некоторой системе связи для передачи информации используются сигналы  $s_1(t) = a \cos(k\omega t + \varphi)$  и  $s_2(t) = a \cos(l\omega t + \varphi + \pi/2)$  ( $k, l$  — целые числа), имеющие длительность  $T$ . Показать, что данная система сигналов является ортогональной в усиленном смысле. Найти расстояние между сигналами  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  в пространстве Гильберта.

2.4.7. Найти расстояние в пространстве Гильберта между сигналами  $s_1(t) = a \cos(k\omega t + \varphi)$ ,  $s_2(t) = b \cos(l\omega t + \varphi + \pi/2)$  для вариантов числовых значений, приведенных в табл. 2.7.

Таблица 2.7

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a$	4	10	3	3	8	4	2	4	7	7	7	8
$b$	3	6	2	7	2	7	2	10	5	3	10	7
$k$	3	10	4	5	8	4	9	2	10	7	6	2
$l$	4	1	5	3	2	3	10	10	5	7	5	3

2.4.8. Сигнал  $s(t)$ , имеющий длительность  $T$ , задан рядом Фурье

$$s(t) = a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + a_2 \cos 2 \frac{2\pi}{T} t + a_3 \cos 3 \frac{2\pi}{T} t + b_1 \sin \frac{2\pi}{T} t + b_2 \sin 2 \frac{2\pi}{T} t + b_3 \sin 3 \frac{2\pi}{T} t.$$

Найти координаты этого сигнала и показать, что норма сигнала, вычисленная по этим координатам, равна норме в пространстве Гильберта.

2.4.9. Показать, что в системе связи с широкополосными сигналами, имеющими длительность  $T=20$  мс и занимающими полосу частот  $F=10$  кГц, можно создать:

- ортогональную систему, содержащую 400 реализаций;
- биортогональную систему — 800 реализаций;
- ортогональную в усиленном смысле систему — 200 реализаций.

2.4.10. Определить скалярное произведение сигналов  $s_1(t) = a_1 \cos \omega_1 t$  и  $s_2(t) = a_2 \cos \omega_2 t$ , заданных на интервале  $T$ , при условии  $\omega_1 + \omega_2 \gg \omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$ .

Найти нормы сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ .

2.4.11. Решить задачу 2.4.10 для вариантов числовых значений, заданных в табл. 2.8.

2.4.12. Показать, что расстояние между тремя произвольными сигналами  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  и  $s_3(t)$ , имеющими длительность  $T$ , удовлетворяют условию

$$d(s_1, s_3) \leq d(s_2, s_3) + d(s_1, s_2).$$

Т а б л и ц а 2.8

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_1, \text{ мВ}$	10	8	2	6	1	9	7	10	4	8
$a_2, \text{ мВ}$	5	10	5	3	10	5	9	3	9	3
$\omega_1 \cdot 10^{-4}, \text{ с}^{-1}$	4,94	6,23	1,78	1,83	8,24	5,85	6,58	3,21	2,19	3,55
$\omega_2 \cdot 10^{-4}, \text{ с}^{-1}$	4,87	6,15	1,79	1,75	8,37	5,95	6,61	3,31	2,17	3,49
$T, \text{ мс}$	40	90	40	80	70	50	20	80	100	20

2.4.13. На вход приемника поступают сигналы  $\{s_i(t)\}$ , заданные на интервале  $(0, T)$  в виде

$$s_i(t) = k \cos \varphi u_i(t) + k \sin \varphi \tilde{u}_i(t), \quad i = \overline{1, M},$$

где  $k$  — произвольный коэффициент передачи;  $\varphi$  — фазовый сдвиг в канале. Какими должны быть сигналы на передаче  $\{u_i(t)\}$ , чтобы сигналы  $\{s_i(t)\}$  были ортогональными?

2.4.14. По базисным функциям  $\varphi_1(t) = \sqrt{2E/T} \cos \omega_0 t$  и  $\varphi_2(t) = -\sqrt{2E/T} \sin \omega_0 t$  составить выражения сигналов биортогонального ансамбля при  $M=4$ . Изобразить полученные сигналы в виде точек на плоскости. Найти расстояния между сигналами.

2.4.15. Заданы сигналы амплитудно-фазовой модуляции (АФМ-сигналы):

$$s_1(t) = \sqrt{2E/T} \cos \omega_0 t, \quad s_2(t) = \sqrt{2E/T} \cos(\omega_0 t + 2\pi/3),$$

$$s_3(t) = \sqrt{2E/T} \cos(\omega_0 t + 4\pi/3), \quad s_4(t) = 0.$$

Изобразить ансамбль АФМ-сигналов в виде точек на плоскости и определить расстояния между сигналами.

2.4.16. На рис. 2.3 изображен двумерный ансамбль симплексных сигналов ( $M=n+1=3$ ). Найти расстояния между сигналами ансамбля, полагая, что энергии всех сигналов одинаковы и равны  $E$ .

2.4.17. По каналу связи передаются четыре 2-разрядные двоичные комбинации, причем символу 0 соответствует первичный сигнал  $h$ , а символу 1 — сигнал  $-h$ . Положим, что когда элементарный приемник не может с большой надежностью (из-за помех в канале) принять решение в пользу элементарного символа 1 или 0, он регистрирует знак «?» (стирание), который фиксируется нулевым уровнем. Изобразить пространство первичных сигналов на передаче и приеме.

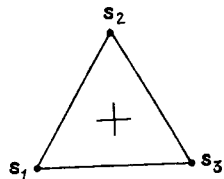


Рис 2.3 Двумерный ансамбль симплексных сигналов

2.4.18. Даны три 8-разрядные двоичные кодовые комбинации:  $\mathbf{b}_1 = 01011001$ ;  $\mathbf{b}_2 = 01000110$ ;  $\mathbf{b}_3 = 10110010$ . Показать, что расстояния

по Хэммингу между заданными комбинациями удовлетворяют условию

$$d(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3) \leq d(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) + d(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$$

2.4.19. Решить задачу 2.4.18 для следующих вариантов 4-разрядных двоичных комбинаций:

- |                           |                       |                         |
|---------------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1) $\mathbf{b}_1 = 0000$  | $\mathbf{b}_2 = 1111$ | $\mathbf{b}_3 = 0010$ ; |
| 2) $\mathbf{b}_1 = 0001$  | $\mathbf{b}_2 = 1110$ | $\mathbf{b}_3 = 0011$ ; |
| 3) $\mathbf{b}_1 = 0010$  | $\mathbf{b}_2 = 1101$ | $\mathbf{b}_3 = 0101$ ; |
| 4) $\mathbf{b}_1 = 0011$  | $\mathbf{b}_2 = 1100$ | $\mathbf{b}_3 = 0111$ ; |
| 5) $\mathbf{b}_1 = 0100$  | $\mathbf{b}_2 = 1001$ | $\mathbf{b}_3 = 1001$ ; |
| 6) $\mathbf{b}_1 = 0101$  | $\mathbf{b}_2 = 1010$ | $\mathbf{b}_3 = 0001$ ; |
| 7) $\mathbf{b}_1 = 0110$  | $\mathbf{b}_2 = 1001$ | $\mathbf{b}_3 = 0100$ ; |
| 8) $\mathbf{b}_1 = 0111$  | $\mathbf{b}_2 = 1000$ | $\mathbf{b}_3 = 1000$ ; |
| 9) $\mathbf{b}_1 = 1000$  | $\mathbf{b}_2 = 0111$ | $\mathbf{b}_3 = 1011$ ; |
| 10) $\mathbf{b}_1 = 1001$ | $\mathbf{b}_2 = 0110$ | $\mathbf{b}_3 = 1110$ ; |
| 11) $\mathbf{b}_1 = 1010$ | $\mathbf{b}_2 = 0101$ | $\mathbf{b}_3 = 1100$ ; |
| 12) $\mathbf{b}_1 = 1011$ | $\mathbf{b}_2 = 0100$ | $\mathbf{b}_3 = 1010$ . |

## 2.5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ НЕПРЕРЫВНОГО АРГУМЕНТА. ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА

В технике связи очень часто возникает необходимость представить детерминированные и случайные функции непрерывного аргумента (например, времени или частоты) совокупностью их значений в дискретных точках (сечениях). Такое представление называют дискретизацией функций по аргументу.

Очень часто дискретизацию осуществляют на основе теоремы В. А. Котельникова, согласно которой функция  $s(t)$ , спектральная плотность которой отлична от нуля только в полосе частот  $(-F, F)$ , полностью определяется своими значениями, отсчитанными в дискретных точках через интервал

$$\Delta t = 1/(2F). \quad (2.54)$$

Значения функции  $s(t)$  в любой точке  $t$  выражаются формулой

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta t)}{2\pi F(t - k\Delta t)}, \quad (2.55)$$

где  $s(k\Delta t)$  — отсчеты непрерывной функции  $s(t)$  в дискретные моменты  $t = k\Delta t$ .

Строго говоря, функция с ограниченным спектром не ограничена во времени (нефинитна) и, наоборот, финитная функция времени имеет неограниченный спектр. Практический способ ограничения функции по спектру сводится к про-

пусканию сигнала через фильтр нижних частот (или полосовой фильтр) Относительная погрешность такого усечения спектра

$$\delta_y = \frac{\overbrace{[s(t) - s_{\sim}(t)]^2}^{\text{усечение спектра}}}{\underbrace{s^2(t)}_{\text{сигнал}}} = \frac{\int_F |S(j\omega)|^2 df}{\int_0^\infty |S(j\omega)|^2 df} \quad (2.56)$$

в случае детерминированной функции  $s(t)$  и

$$\delta_y = \frac{\int_F G(f) df}{\int_0^\infty G(f) df} \quad (2.57)$$

для случайного процесса.

Полагая, что одновременно ограничен спектр сигнала полосой  $F$  и его длительность интервалом  $T$ , можно воспользоваться усеченным рядом Котельникова для приближенного представления сигнала:

$$s_{\sim}(t) = \sum_{k=1}^B s(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta t)}{2\pi F(t - k\Delta t)} \quad (2.58)$$

В выражении (2.58)  $B = T/\Delta t + 1 = 2FT + 1$  — число отсчетов, приближенно описывающих финитный сигнал  $s(t)$ , или база сигнала. При  $2FT \gg 1$  можно считать, что

$$B = 2FT. \quad (2.59)$$

Ряды (2.55) и (2.58) могут быть использованы и для представления случайных процессов. В этом случае коэффициенты указанных рядов являются случайными величинами.

Если допустить, что воспроизведение процесса  $X(t)$  на приеме осуществляется формированием ступенчатой функции  $Y(t)$  (рис 24) с шагом  $\Delta_T$

$$Y(t) = X(t_i - \Delta_T), \quad t_i < t < t_{i+1}, \quad (2.60)$$

то, полагая, что речь идет о стационарном случайном процессе, интервал оп-ределения которого превосходит шаг воспроизведения  $\Delta_T$ , можно найти средний квадрат ошибки воспроизведения:

$$\bar{\epsilon}^2 = \overline{[Y(t) - X(t_i)]^2} = \overline{[X(t_i - \Delta_T) - X(t_i)]^2}. \quad (2.61)$$

Осуществляя простые вычисления, получаем относительную погрешность воспроизведения

$$\delta_B = \bar{\epsilon}^2 / B_x(0) = 2[1 - R_x(\Delta_T)], \quad (2.62)$$

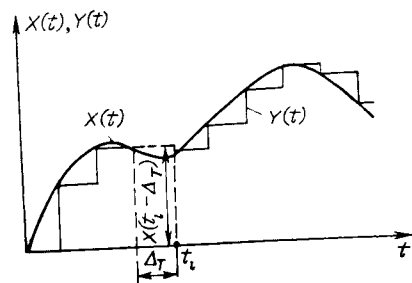


Рис 24 К пояснению воспроизведения процесса  $X(t)$  путем формирования ступенчатой функции

где  $R_x(\Delta_T)$  — значение нормированной корреляционной функции процесса при аргументе  $\Delta_T$ .

Из (2.62) можно получить выражение для допустимой величины шага воспроизведения  $\Delta_T$ , исходя из заданной погрешности воспроизведения  $\delta_B$ :

$$\Delta_T = R_x^{-1}(1 - 0,5\delta_B), \quad (2.63)$$

где  $R_x^{-1}$  — функция, обратная нормированной корреляционной функции процесса.

## Задачи

2.5.1. Определить относительную погрешность  $\delta_y$  при представлении сигнала  $s(t) = a \exp(-\beta^2 t^2)$  (колокольный импульс) рядом Котельникова, полагая, что полоса сигнала ограничивается в результате пропускания через идеальный фильтр нижних частот с полюсой  $F$ . Найти интервал дискретизации  $\Delta t$ , полагая, что  $\beta = 20 \text{ с}^{-1}$ ,  $\delta_y = 10\%$ .

2.5.2. Найти относительную погрешность представления случайного синхронного двоичного сигнала рядом Котельникова при произвольной граничной частоте. Определить величину  $\delta_y$ , если граничная частота выбрана равной  $F_s$  и  $2F_s$  ( $F_s$  — ширина энергетического спектра, найденная по методу эквивалентного прямоугольника).

2.5.3. Решите задачу 2.5.1 для вариантов числовых значений, заданных в табл. 2.9.

Таблица 2.9

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\beta, \text{с}^{-1}$	7	7	2	8	5	4	1	5	3	2	10	2
$\delta_y, \%$	6	9	5	6	3	4	3	5	8	2	8	2

2.5.4. Найти базу сигнала, представляющего собой последовательность из  $n = 15$  элементарных прямоугольных двоичных импульсов длительностью  $\tau_n = 20 \text{ мс}$ .

2.5.5. Решить задачу 2.5.4 для вариантов числовых значений, заданных в табл. 2.10.

Таблица 2.10

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n$	49	94	48	87	52	28	80	25	52	25	52	71
$\tau_n, \text{мс}$	3	7	2	2	7	8	10	7	5	10	4	5

2.5.6. Случайный процесс с корреляционной функцией  $B(\tau) = B(0) \exp(-\alpha|\tau|)$  дискретизирован с шагом  $\Delta t$ . Найти погрешность представления такого процесса рядом Котельникова в зависимости от параметров  $\alpha$  и  $\Delta t$ .



2.5.7. Решить задачу 2.5.6 для вариантов числовых значений, заданных в табл. 2.11.

Таблица 2.11

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\Delta t$ , мс	6	2	3	5	8	4	1	5	3	2	3	10	10	5
$\alpha$ , мс <sup>-1</sup>	3	2	8	8	5	1	10	7	10	7	4	8	3	5

2.5.8. Нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса, подлежащего дискретизации,  $R_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$ . Найти шаг воспроизведения  $\Delta t$ , при котором относительная погрешность воспроизведения  $\delta_v$  равна 1%,  $\alpha = 0,1 \text{ с}^{-1}$ . Сравнить полученную величину  $\Delta t$  с интервалом дискретизации по Котельникову  $\Delta t$  (см. задачу 2.5.6), обеспечивающим такую же погрешность  $\delta_v$ .

2.5.9. Для случайного процесса, имеющего нормированную корреляционную функцию  $R_x(\tau) = \exp(-\beta^2\tau^2)$ , найти шаг равномерной дискретизации  $\Delta t$ , при котором обеспечивается заданная относительная погрешность воспроизведения  $\delta_v$ .

2.5.10. Решить задачу 2.5.9 для вариантов числовых значений, заданных в табл. 2.12.

Таблица 2.12

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\beta$ , с <sup>-1</sup>	0,3	0,2	0,8	0,5	0,5	0,1	1	0,8	1	0,7	0,4	0,8
$\delta_v$ , %	1	4	4	10	1	2	7	8	3	7	5	2

## Глава 3. КАНАЛЫ СВЯЗИ

### 3.1. МОДЕЛИ КАНАЛОВ СВЯЗИ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Под каналом связи в широком смысле понимают совокупность средств, предназначенных для передачи сообщений и соответствующих им сигналов. Для примера на рис. 3.1 представлена структурная схема канала связи при передаче дискретных сообщений.

Классификацию каналов связи можно осуществлять по различным критериям, в частности, по характеру сигналов на их входе и выходе. С этой точки зрения различают три типа каналов.

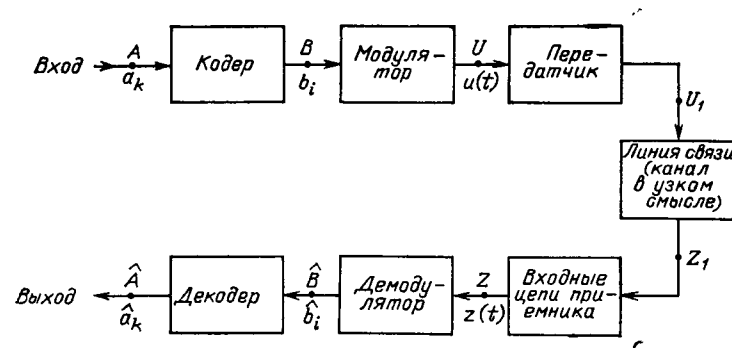


Рис. 3.1. Структурная схема канала связи при передаче дискретных сообщений

**Дискретные каналы.** На входе и выходе таких каналов наблюдаются дискретные сигналы (как по уровням, так и состояниям информационного параметра во времени) или символы из конечномерного ансамбля. Примерами дискретных каналов являются каналы, заданные между точками  $A-\hat{A}$ ,  $B-\hat{B}$ ,  $A-\hat{B}$ ,  $B-\hat{A}$  на рис. 3.1.

Следует подчеркнуть, что дискретность или непрерывность канала определяется только характером информационных параметров сигналов на его входе и выходе.

Дискретный канал математически описан, если заданы алфавит кодовых символов на входе  $b_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) вместе с их вероятностями  $P(b_i)^*$ , алфавит кодовых символов на выходе  $\hat{b}_j$  ( $j = \overline{1, m'}$ ) и значения вероятностей переходов  $P(\hat{b}_j | b_i)$  ( $i = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1, m'}$ ), т. е. вероятностей того, что на выходе канала появится символ  $\hat{b}_j$  при условии, что на вход подан символ  $b_i$ . (Если интересоваться скоростью передачи информации по каналу, то следует также задать число символов, подаваемых в среднем в единицу времени на вход канала. Однако эта характеристика рассматриваться не будет.)

Совместная вероятность подачи символа  $b_i$  на вход и появления символа  $\hat{b}_j$  на выходе

$$P(b_i, \hat{b}_j) = P(b_i)P(\hat{b}_j | b_i) = P(\hat{b}_j)P(b_i | \hat{b}_j). \quad (3.1)$$

Вероятность того, что на вход подан символ  $b_i$  при условии, что на выходе появится символ  $\hat{b}_j$  (апостериорная вероятность)

$$P(b_i | \hat{b}_j) = \frac{P(b_i)P(\hat{b}_j | b_i)}{\sum_{i=1}^m P(b_i)P(\hat{b}_j | b_i)} \quad (3.2)$$

(формула Байеса).

Дискретный канал называется однородным (стационарным) и без памяти, если вероятности переходов  $P(\hat{b}_j | b_i)$  для каждой пары  $i, j$  не меняются во времени и не зависят от того, какие символы передавались ранее.

\* Если источник имеет память, то должны быть заданы вероятности цепочек символов или априорные и условные вероятности передачи символов.

Если эти вероятности зависят от времени, канал называется неоднородным (нестационарным); если же они зависят от символов, переданных ранее, то канал называется каналом с памятью.

Если в однородном дискретном канале алфавиты на входе и выходе одинаковы ( $m=m'$ ) и для любой пары  $i \neq j$  вероятности  $P(b_j|b_i)=p_0$ , а для пары  $i=j$   $P(b_j|b_i)=q=1-(m-1)p_0$ , то такой канал называют симметричным каналом без стирания.

Если объем алфавита символов на выходе канала  $m'$  превышает объем алфавита входных символов  $m$ , канал называют каналом со стиранием. Чаще всего на практике встречаются дискретные каналы со стиранием, в которых  $m'=m+1$ .

Для любой модели дискретного канала можно записать, пользуясь сложением в дискретном векторном пространстве (поразрядным, по модулю основания кода  $m$ )

$$\hat{B}^{[n]} = B^{[n]} + E^{[n]}, \quad (3.3)$$

где  $B^{[n]}$  и  $\hat{B}^{[n]}$  — случайные последовательности (кодвые комбинации) из  $n$  символов на входе и выходе канала;  $E^{[n]}$  — случайный вектор ошибки, который в общем случае зависит от  $B^{[n]}$ . Различные модели отличаются распределением вероятностей вектора  $E^{[n]}$ .

При двоичном кодировании ( $m=2$ ) компоненты (разряды) вектора ошибки принимают значения 0 и 1. Всякая 1 в векторе ошибки означает, что в соответствующем месте передаваемой последовательности символ принят ошибочно, а 0 означает безошибочный прием. Число ненулевых символов в векторе ошибок называется его весом. Он равен расстоянию по Хеммингу  $d(B^{[n]}, \hat{B}^{[n]})$  между переданной и принятой кодвыми последовательностями.

**Дискретно-непрерывные каналы.** В таких каналах сигналы на входе дискретны, а на выходе — непрерывны (по уровням) или наоборот. Примерами таких каналов являются каналы, заданные между точками  $B-Z$ ;  $A-Z$ ;  $Z-A$  (см. рис. 3.1). Очень часто в технике связи определяют или обрабатывают непрерывные сигналы лишь в дискретных точках оси времени. В этом случае говорят о сигнале или соответствующем канале с дискретным временем.

Будем для определенности в дальнейшем считать, что дискретно-непрерывный канал имеет дискретный вход и непрерывный выход. Дискретно-непрерывный канал математически описан, если заданы алфавит входных символов  $b_i$  ( $i=\overline{1, m}$ ) вместе с их априорными вероятностями  $P(b_i)$  и плотности переходных вероятностей  $w(z|b_i)$  того, что на выходе канала появится реализация колебания  $z(t)$  при условии, что на вход поступил символ  $b_i$ .

Эти плотности называют функцией правдоподобия того, что передан символ  $b_i$  при условии, что фиксирована на выходе канала реализация колебания  $z(t)$ .

Если  $z(t) = s_i(t) + n(t)$  [ $s_i(t)$  — принимаемый на интервале анализа  $T$  сигнал, обусловленный подачей на вход канала символа  $b_i$ ;  $n(t)$  — реализация аддитивного (линейно складывающегося с сигналом) шума в канале], то в том случае, когда сигнал  $s_i(t)$  полностью детерминирован (его параметры известны точно в месте приема),

$$w(z|b_i) = w[s_i(t) + n(t)|b_i] = w[n(t)], \quad (3.4)$$

т. е. функция правдоподобия определяется плотностью вероятности шума в канале.

При дискретном времени функция правдоподобия  $w(z|b_i)$  — это многомерная ( $n$ -мерная) плотность вероятности. При  $n \rightarrow \infty$  можно получить функцию правдоподобия (при непрерывном времени — функционал правдоподобия). Так, если в канале действует гауссовский аддитивный белый шум  $N(t)$  со спектральной плотностью  $N_0$ , то

$$w[z(t)|b_i] = K \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - s_i(t)]^2 dt \right\}, \quad (3.5)$$

где  $K$  определяется условием нормирования\*.

Вероятность того, что при заданном элементе принятого колебания  $z(t)$  был передан символ  $b_i$  (апостериорная вероятность), определяется формулой

$$P[b_i|z(t)] = K \frac{P(b_i) w(z|b_i)}{w(z)}, \quad (3.6)$$

где  $w(z) = \sum_{i=1}^m P(b_i) w(z|b_i)$  — плотность вероятности элемента сигнала  $z(t)$ .

Если плотности вероятности  $w(z|b_i)$  для любого сочетания  $z(t)$ ,  $b_i$  остаются постоянными во времени и не зависят от того, какие символы  $b_i$  и элементы  $z(t)$  фиксировались ранее, то дискретно-непрерывный канал называется однородным (стационарным) и без памяти. Если плотности вероятности  $w(z|b_i)$  зависят от времени, то канал неоднороден (нестационарен). Если они зависят от предыдущих символов, то канал обладает памятью.

**Непрерывные каналы.** В таких каналах сигналы на входе и выходе непрерывны (по уровням).

Для математического описания непрерывного канала надо задать плотности вероятности входных сигналов  $w(u)$  и условные плотности вероятности перехода  $w(z|u)$ .

Канал однороден (стационарен), если плотности вероятности переходов  $w(z|u)$  не зависят от времени. Канал не имеет памяти, если значения выходного сигнала  $z(t)$  в момент  $t$  зависят только от значения входного сигнала  $u(t)$  в тот же момент времени. Если же значения сигнала  $z(t)$  в момент  $t$  зависят от значений входных сигналов и в предшествующие моменты времени, то канал имеет память.

## Задачи

**3.1.1.** На вход канала связи на интервале  $T$  поступает сигнал  $u_i(t) = a \cos(\omega_0 t + i2\pi/m)$ , где  $a$  — произвольная амплитуда;  $\omega_0$ ,  $m$  — постоянные;  $i=\overline{1, m}$ . С выхода канала снимается сигнал  $s_i(t) = ka \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , где  $\varphi$  — случайная фаза, равномерно распределенная на интервале  $(0, 2\pi)$ . Показать, что по амплитуде сигналов канал является непрерывным, а по параметру  $\varphi$  — дискретно-непрерывным.

**3.1.2.** На вход канала поступает периодическая последовательность прямоугольных импульсов, промодулированных по фазе не-

\* В дальнейшем будем интересоваться нормированными значениями функционалов правдоподобия  $w(z|b_i)/K$  или их отношением. Поэтому вопросы сходимости коэффициента  $K$  здесь рассматриваться не будут.

прерывным сообщением, а с выхода снимается аддитивная смесь этого сигнала и флуктуационного шума. Показать, что по амплитудам сигнала канал является дискретно-непрерывным, а по отношению к фазам импульсов — непрерывным.

3.1.3. Показать, что вероятность того, что при передаче символов по двоичному однородному симметричному каналу без памяти и стирания будет принято ошибочно  $q$  из  $n$  символов, определяется формулой

$$P(q) = C_n^q p^q (1-p)^{n-q}.$$

3.1.4. Определить вероятность ошибочного приема  $q$  символов в последовательности из  $n$  символов, передаваемой по двоичному однородному симметричному каналу без памяти и стирания, если вероятность ошибочного приема элементарного символа  $p_0$ .

3.1.5. Решить задачу 3.1.4 для вариантов числовых значений, заданных в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Вариант	1	2	3	4	5	6
$n$	9	7	5	7	7	11
$q$	3	2	2	4	5	2
$p_0$	$4 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-3}$

Вариант	7	8	9	10	11	12
$n$	9	15	8	6	7	8
$q$	2	7	5	4	5	6
$p_0$	$4 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$

3.1.6. Определить среднее число ошибок в цепочке из  $n$  символов в стационарном двоичном симметричном канале без памяти и стирания, если вероятность ошибочного приема элементарного символа  $p_0$ . Упростить полученный результат для  $p_0 \ll 1$ .

3.1.7. Определить апостериорные вероятности передачи символов  $P(b_i | \hat{b}_j)$ ,  $P(b_i | ?)$  в дискретном однородном симметричном канале без памяти со стиранием, заданном вероятностями перехода  $P(\hat{b}_j | b_i) = 1 - p_1$  при  $i = j$ ;  $P(\hat{b}_j | b_i) = p_0$  при  $i \neq j \neq m'$ ;  $P(\hat{b}_{m'} | b_i) = P(? | b_i) = p_c$  при  $i \neq j \neq m'$ ;  $p_1 = p_c + (m-1)p_0$  ( $i = 1, m$ ; ? — символ стирания в месте приема, которому присвоен номер  $m' = m + 1$ ).

3.1.8. Вычислить апостериорные вероятности передачи символов в дискретном однородном симметричном двоичном канале со стиранием для вариантов числовых значений, заданных в табл. 3.2.

3.1.9. Для дискретного однородного канала без памяти со стиранием ( $m' = m + 1$ ) найти среднюю (безусловную) вероятность правильного приема символов  $p_{\text{прав}}$ , безусловную вероятность оши-

Таблица 3.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_1$	0,99	0,9	0,6	0,8	0,7	0,8	0,9	0,9	0,6	0,7	0,9	0,75
$p_0$	0,005	—	—	—	0,2	0,15	0,09	—	—	—	0,06	0,22
$p_c$	—	0,06	0,35	0,1	—	—	—	0,02	0,35	0,1	—	—
$P(b_1)$	0,5	0,4	0,9	0,5	0,8	0,3	0,3	0,8	0,9	0,4	0,6	0,3
$d(b_2)$	0,5	0,6	0,1	0,5	0,2	0,7	0,7	0,2	0,1	0,6	0,4	0,7

бочного приема символов  $p_{\text{ош}}$ , безусловную вероятность стирания символов  $p_{\text{ст}}$ , если известны условные вероятности правильных переходов  $P(\hat{b}_j | b_i)$ ,  $j = i$ , ошибочных переходов  $P(\hat{b}_j | b_i)$ ,  $j \neq i \neq m'$ , и стирания  $P(\hat{b}_{m'} | b_i) = P(? | b_i)$ ,  $i \neq j \neq m'$ , и безусловные вероятности передачи символов  $p(b_i)$ .

3.1.10. Показать, что характеристики однородного канала без памяти со стиранием ( $m' = m + 1$ ) не зависят от априорных вероятностей передачи символов и определяются только вероятностями переходов при условиях

$$P(\hat{b}_i | b_i) = 1 - p_0 - p_c; P(\hat{b}_j | b_i) = p_0; P(? | b_i) = p_c$$

(симметричный канал).

3.1.11. Двоичный однородный симметричный канал со стиранием характеризуется вероятностями переходов, заданными в табл. 3.3. Найти апостериорные вероятности передачи символов, безусловную вероятность ошибочного приема и безусловную вероятность стирания. Априорные вероятности передачи символов считать одинаковыми:

$$P(b_1) = P(b_2) = 0,5.$$

Таблица 3.3

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_0$	0,01	—	0,01	0,02	—	0,02	0,03	—	0,015	0,02	—	0,03
$p_1$	0,7	0,69	—	0,75	0,8	—	0,7	0,8	—	0,7	0,65	0,9
$p_c$	—	0,29	0,2	—	0,19	0,2	—	0,15	0,25	—	0,3	—

3.1.12. Задан двоичный однородный канал без стирания и с памятью, простирающейся на два соседних символа. Пусть ошибки в таком канале описываются простой цепью Маркова, причем вероятность того, что данный символ будет принят ошибочно, равна  $p_1$  при условии, что предшествующий символ принят верно, и  $p_2$ , если предшествующий символ принят ошибочно. Найти для такого канала безусловную (среднюю) вероятность ошибки и объяснить, почему при заданной модели канала ошибки группируются при  $p_2 > p_1$  и рассредотачиваются при  $p_1 > p_2$ .

3.1.13. В дискретном канале переданная двоичная последовательность  $\mathbf{V}^{[8]} = 11000111$ , а вектор ошибки  $\mathbf{E}^{[8]} = 10101010$ . Напи-

сать принимаемую последовательность  $\hat{\mathbf{V}}^{[8]}$ . Чему равен вес вектора ошибки? Для какого канала характерен такой вектор ошибки: для канала с памятью (с группированием ошибок) или для канала без памяти?

3.1.14. В дискретном канале переданная и принятая кодовые комбинации равны  $\mathbf{V}^{[8]}=11000111$ ,  $\hat{\mathbf{V}}^{[8]}=11111111$ . Написать вектор ошибки. Чему равен его вес? Для какого канала характерен такой вектор ошибок: для симметричного или несимметричного канала, с памятью или без памяти?

3.1.15. Решить задачу 3.1.13 для следующих вариантов пар принятых и переданных кодовых комбинаций:

- 1)  $\mathbf{V}=10101$   $\hat{\mathbf{V}}=01010$     2)  $\mathbf{V}=11111$   $\hat{\mathbf{V}}=00011$
- 3)  $\mathbf{V}=00011$   $\hat{\mathbf{V}}=11000$     4)  $\mathbf{V}=00100$   $\hat{\mathbf{V}}=10001$
- 5)  $\mathbf{V}=00111$   $\hat{\mathbf{V}}=10000$     6)  $\mathbf{V}=01010$   $\hat{\mathbf{V}}=10011$
- 7)  $\mathbf{V}=01011$   $\hat{\mathbf{V}}=10100$     8)  $\mathbf{V}=11100$   $\hat{\mathbf{V}}=00011$
- 9)  $\mathbf{V}=10111$   $\hat{\mathbf{V}}=01000$     10)  $\mathbf{V}=01111$   $\hat{\mathbf{V}}=10000$
- 11)  $\mathbf{V}=01001$   $\hat{\mathbf{V}}=10110$     12)  $\mathbf{V}=11011$   $\hat{\mathbf{V}}=00000$

3.1.16. На вход дискретно-непрерывного канала на тактовом интервале  $T$  поступают двоичные сигналы  $u_1(t)=a \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  или  $u_2(t)=-a \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  (модуляция фазы на  $\pi$ ). Колебание на выходе канала на интервале анализа  $T$  можно представить в виде

$$z(t) = s_i(t) + n(t), \quad s_i(t) = k(t)u_i(t-\tau),$$

где  $k(t)$ ,  $\tau$  — коэффициент передачи канала и запаздывание сигнала в канале;  $n(t)$  — реализация нормального флуктуационного шума с равномерным энергетическим спектром.

Полагая, что все параметры сигнала известны точно в месте приема (модель канала с постоянными параметрами), а колебание  $z(t)$  анализируется на интервале  $T$  в дискретных сечениях  $t_k$ , кратных величине  $\Delta t = 1/(2F)$ , написать выражения для функций правдоподобия  $w(z|s_1)$  и  $w(z|s_2)$ .

3.1.17. По условию предыдущей задачи найти выражение функционала правдоподобия  $w(z|b_i)$ , полагая, что в канале действует белый шум ( $F \rightarrow \infty$ ).

3.1.18. Показать, что в дискретно-непрерывном канале сравнение величин апостериорных вероятностей передачи символов  $p(b_i|z)$  с различными номерами для выбора наибольшей сводится к сравнению функций правдоподобия  $w(z|b_i)$ , умноженных на  $p(b_i)$ .

3.1.19. При передаче узкополосных сигналов  $u_i(t)$  колебание на выходе канала можно часто представить в виде  $z(t) = s_i(t) + n(t)$ , где  $s_i(t) = k \cos \Theta_k u_i(t) - k \sin \Theta_k \bar{u}_i(t)$ ,  $\bar{u}_i(t)$  — сопряженный

сигнал, а  $k$  и  $\Theta_k$  — коэффициент передачи и фазовый сдвиг в канале.

Полагая, что  $n(t)$  — реализация стационарного аддитивного гауссовского белого шума со спектральной плотностью мощности  $N_0$ , а фаза сигнала случайна и имеет равномерное распределение на интервале  $-\pi, \pi$  (модель канала с неопределенной фазой), найти функционал правдоподобия.

### 3.2. ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ СИГНАЛОВ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ НЕПРЕРЫВНОГО КАНАЛА

Верность связи (степень соответствия переданного и принятого сообщений) определяется главным образом искажениями сигналов в непрерывной части канала, а также присутствующими в канале аддитивными шумами.

Под искажениями понимают нежелательные изменения формы передаваемых сигналов, которые могут возникнуть как в линейных, так и нелинейных звеньях канала\*.

Сигнал  $s(t)$  в момент  $t$  на выходе произвольной физически осуществимой линейной системы (канала) можно связать с сигналом на его входе  $u(t)$  интегралом Дюамеля

$$s(t) = \int_0^{\infty} g(t, \tau) u(t-\tau) d\tau, \quad (3.7)$$

где  $g(t, \tau)$  — импульсная переходная характеристика системы или реакция системы в момент  $t$  на  $\delta$ -импульс, поданный на вход в момент  $t-\tau$ .

Протяженность переходного процесса  $g(t, \tau)$  по переменной  $\tau$  называют интервалом рассеяния во времени (или памятью) линейного канала. Обозначим его через  $\tau_p$ .

По методу равновеликого прямоугольника интервал рассеяния во времени определяется соотношением

$$\tau_p = \frac{\int_0^{\infty} |g(t, \tau)| d\tau}{|g(t, \tau)|_{\max}}. \quad (3.8)$$

Зависимость  $g(t, \tau)$  от аргумента  $t$  свидетельствует о том, что параметры канала меняются во времени, что приводит к расширению спектра выходного сигнала  $s(t)$  по сравнению со спектром входного сигнала. Это расширение спектра (интервал рассеяния канала по частоте  $F_p$ ) можно найти, если определить преобразование Фурье от  $s(t)$  или от  $g(t, \tau)$  (по переменной  $t$ , считая  $\tau$  параметром), а затем и ширину (например, методом равновеликого прямоугольника) квадрата амплитудного спектра (спектра мощности).

\* Следует заметить, что термин «искажения» относится к изменению формы сигнала в тех звеньях канала, которые по своему назначению не должны этого делать. Вместе с тем следует иметь в виду, что ряд устройств (звеньев) канала связи выполняет целевые преобразования входных сигналов, немислимые без изменения их формы, например модуляция, демодуляция, интегрирование, дифференцирование и др.

**Коэффициент рассеяния**

$$k_p = \tau_p F_p \quad (3.9)$$

является важной инженерной характеристикой любого канала связи.

Вместо системной характеристики линейной системы  $g(t, \tau)$  часто пользуются характеристикой  $k(j\omega, t) = k(\omega, t) \exp[j\varphi(\omega, t)]$ , называемой передаточной функцией системы.

Характеристики  $g(t, \tau)$  и  $k(j\omega, t)$  связаны парой преобразований Фурье:

$$k(j\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (3.10)$$

$$g(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k(j\omega, t) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.11)$$

В нелинейных звеньях канала связи выходной сигнал в момент  $t$  часто можно связать с входным сигналом  $u(t)$  в тот же момент времени некоторой заранее известной (но не всегда взаимнооднозначной) зависимостью (амплитудной характеристикой)

$$s(t) = \varphi[u(t)]. \quad (3.12)$$

Такие нелинейные звенья называют нелинейными.

**Задачи**

3.2.1. Показать, что если параметры линейного канала не меняются во времени (канал стационарен), его системные характеристики удовлетворяют условиям:

$$g(t, \tau) = g(\tau); \quad k(\omega, t) = k(\omega).$$

3.2.2. Если сигналы на выходе и входе канала связаны соотношением  $s(t) = ku(t - \tau_c)$ , где  $k, \tau_c$  — известный коэффициент передачи и запаздывание в канале, то говорят, что отсутствуют искажения формы сигнала. Показать, что в линейном канале искажения сигнала отсутствуют, если системные характеристики канала удовлетворяют условиям:

$$g(t, \tau) = k\delta(t - \tau_c); \quad k(j\omega, t) = k \exp(-j\omega\tau_c),$$

т. е. импульсная переходная характеристика имеет вид  $\delta$ -функции ( $\tau_p = 0$ ), амплитудно-частотная характеристика  $k(\omega)$  не зависит от частоты, а фазочастотная характеристика  $\varphi(\omega)$  меняется линейно с частотой.

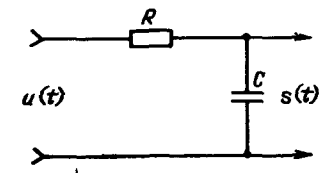


Рис. 32 Модель линейного канала с постоянными параметрами

3.2.3. Пусть некоторый линейный канал с постоянными параметрами моделируется электрической схемой (четырёхполюсником), показанной на рис. 3.2.

Определить интервал временного рассеяния (память) такого канала по методу равнобедренного прямоугольника, если  $R = 100$  Ом и  $C = 100$  мкФ.

Таблица 3.4

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R, Ом	100	90	75	150	200	170	300	150	120	500	50	75
C, мкФ	20	0,2	10	100	0,5	0,05	5	10	15	10	25	100

3.2.4. Решить задачу 3.2.3 для числовых значений R и C, заданных в табл. 3.4.

3.2.5. Пусть передаточная функция некоторого линейного канала не зависит от частоты  $k(\omega, t) = k(t)$ .

Показать, что в таком канале импульсная переходная характеристика  $g(t, \tau) = k(t)\delta(\tau)$ , а сигнал на выходе  $s(t)$  связан с сигналом на входе соотношением  $s(t) = k(t)u(t)$ , т. е. канал представляет собой безынерционный перемножитель.

3.2.6. Для модели канала из предыдущей задачи найти интервал рассеяния по частоте, полагая, что  $k(t) = \exp(-at^2)$ .

3.2.7. Решить задачу 3.2.6 для вариантов значений a, заданных в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha, c^{-2}$	$10^2$	$10^3$	50	$1,7 \cdot 10^3$	10	$5 \cdot 10^3$	40	$6 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$10^4$

3.2.8. Пусть некоторый линейный канал описывается импульсной переходной характеристикой

$$g(t, \tau) = e^{-\alpha_1\tau} e^{-\alpha_2 t}, \quad \tau \geq 0, t \geq 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0.$$

Найти коэффициент рассеяния такого канала.

3.2.9. Найти коэффициент рассеяния канала из задачи 3.2.8 для числовых значений  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , заданных в табл. 3.6.

Таблица 3.6

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha_1, c^{-1}$	0,01	0,02	0,05	0,04	0,4	0,45	0,61	0,17	0,015	0,15
$\alpha_2, c^{-1}$	0,2	0,05	0,17	0,04	0,05	0,2	0,17	0,25	0,4	0,05

3.2.10. По линейному каналу с передаточной функцией  $k(j\omega, t) = k(\omega, t) \exp[j\varphi(\omega, t)]$  передается узкополосный сигнал  $u(t) = A(t) \cos[\omega t + \theta(t)]$ .

Показать, что огибающая выходного сигнала  $A'(t) = k(\omega, t) \times A(t)$ , а его фаза  $\theta'(t) = \theta(t) + \varphi(\omega, t)$ , т. е. канал вносит дополнительную модуляцию амплитуды и фазы.

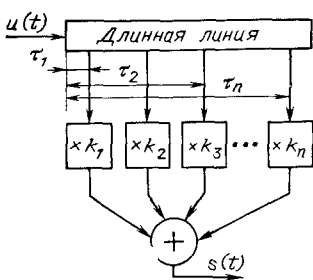


Рис. 3.3. Модель многолучевого канала

3.2.11. Некоторый линейный канал моделируется неискажающей длинной линией с отводами, создающими запаздывание  $\tau_i(t)$  и изменение уровня  $k_i(t)$  (модель многопутевого или многолучевого распространения, рис. 3.3). Составить для заданной модели выражения для системных характеристик  $g(t, \tau)$  и  $k(\omega, t)$ . Записать соотношение для выходного сигнала  $s(t)$ .

3.2.12. Предположим, что коэффициент передачи линейного канала меняется случайно соответственно по закону Рэлея и односторонне-нормальному закону (см. § 2.3), а надежный прием на фоне шума обеспечивается, если амплитуда сигнала в месте приема превышает пороговое значение  $A'_{\text{пор}} = k_{\text{пор}} A = k U_{\text{ш}}$ ,  $k > 1$ ;  $U_{\text{ш}}$  — среднеквадратическое значение шума в канале.

Найти надежность связи в рэлеевском и односторонне-нормальном канале как вероятность выполнения неравенства

$$k > k_{\text{пор}} = k U_{\text{ш}} / A.$$

3.2.13. Решить задачу 3.2.12 для вариантов числовых величин, заданных в табл. 3.7.

Таблица 3.7

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\bar{A}'$ , мкВ	494	948	487	876	752	528	280	286	667	205	298	147
$U_{\text{ш}}$ , мкВ	50	100	120	70	95	90	150	70	125	300	250	100
$k$	4,9	5,2	2,8	6,2	5,8	2,2	1,4	4,7	4,1	1,8	5,1	1,9

3.2.14. Пусть некоторый линейный канал с постоянными параметрами, предназначенный для передачи сигналов в полосе частот  $(0, F_{\text{макс}})$ , имеет передаточную функцию

$$k(j\omega) = A_0 e^{-A_1 \omega^2} e^{-\gamma(a_1 \omega + a_2 \omega^2)}.$$

Напишите выражения для коэффициента передачи  $k(j\omega)_{\text{кор}}$  линейного четырехполосника, обеспечивающего полную коррекцию характеристик канала в заданной полосе частот.

3.2.15. Для канала из задачи 3.2.14 найдите коэффициент передачи корректирующего четырехполосника и постройте графики амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик канала и корректирующего четырехполосника для вариантов числовых значений величин, заданных в табл. 3.8.

3.2.16. Пусть в некотором нелинейном звене канала связи сигналы на выходе и входе связаны соотношением

$$s = 0,1u - 0,3u^3.$$

Таблица 3.8

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$A_0$	0,07	0,07	0,02	0,08	0,05	0,03	0,05	0,01	0,07	0,09	0,09	0,02
$a_1$ , с	2	8	6	6	7	6	2	1	5	8	8	7
$A$ , с <sup>2</sup>	$10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$	$10^{-8}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$a_2$ , с <sup>2</sup>	$10^{-6}$	$10^{-8}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$F_{\text{макс}}$ , Гц	400	900	400	900	700	500	200	900	1000	200	200	800

Найти максимальный уровень входного воздействия, при котором относительное отклонение выходного сигнала от линейной зависимости не превышает 3%.

3.2.17. Амплитудная характеристика канала удовлетворительно аппроксимируется квадратичной зависимостью  $s(t) = au^2(t)$ .

Найти амплитудную характеристику корректирующего четырехполосника.

### 3.3. АДДИТИВНЫЕ ПОМЕХИ В НЕПРЕРЫВНОМ КАНАЛЕ СВЯЗИ

Аддитивные помехи в канале связи вызываются разными причинами и могут принимать самые различные формы. Тем не менее по их электрической и статистической структурам такие помехи чаще всего разделяют на три основных класса:

- 1) флуктуационные или гладкие (распределенные по частоте и времени);
- 2) сосредоточенные по частоте (гармонические);
- 3) сосредоточенные во времени (импульсные).

Флуктуационная помеха — это непрерывный во времени случайный процесс (часто его полагают стационарным и эргодическим) с гауссовским распределением мгновенных значений и нулевым математическим ожиданием. Энергетический спектр  $N_0$  такой помехи в пределах анализируемой полосы частот  $F_0$  полагают равномерным (помеха типа белого шума).

Плотность вероятности появления отрезка флуктуационной помехи длительностью  $T$

$$w(u_T) = K \exp \left( - \frac{1}{N_0} \int_0^T u^2(t) dt \right), \quad (3.13)$$

где  $K$  — постоянная, определяемая из условия нормировки (см. сноску на стр 43).

Гармоническая (сосредоточенная по частоте) помеха — это аддитивная помеха, энергетический спектр которой сосредоточен в сравнительно узкой полосе частот, сопоставимой или даже существенно более узкой, чем полоса частот сигнала.

Сосредоточенные помехи полагают равномерно распределенными в полосе частот, т. е. вероятность  $p_{\text{сн}}$  появления сосредоточенной помехи в полосе  $F$  пропорциональна этой полосе и зависит от среднего числа сосредоточенных по-

мех  $\nu_{сн}$ , превышающих пороговый уровень сигнала  $P_{пор}^*$ , в единице полосы.

Импульсная помеха — аддитивная помеха, представляющая собой последовательность импульсов, возбуждаемых кратковременными ЭДС аperiodического или колебательного характера.

Моменты появления импульсной помехи полагают равномерно распределенными во времени. Это означает, что вероятность появления импульсной помехи  $p_{ин}$  в течение интервала  $T$  пропорциональна длительности интервала, а также среднему числу импульсных помех в единицу времени  $\nu_{ин}$ , зависящему от допустимого порогового уровня помехи.

Очень часто приемное устройство (а нередко и систему связи в целом) строят оптимальным (или близким к оптимальному) по отношению с неизбежной в канале флуктуационной помехе, а в качестве радикального средства борьбы с сосредоточенной и импульсной помехами используют такое построение приемных устройств, при котором уменьшаются вероятности  $p_{сн}$  и  $p_{ин}$  попадания сосредоточенной и импульсной помех на решающую схему приемного устройства. Такая задача успешно решается с помощью различных методов разнесенного приема, т. е. приема информации по параллельным независимым каналам.

### Задачи

3.3.1. Показать, что плотность вероятности реализации гауссовского флуктуационного шума с энергией  $E_{ш}$  и спектральной плотностью мощности  $N_0$  больше плотности вероятности реализации шума, имеющей нулевую энергию в  $\exp(-E_{ш}/N_0)$  раз.

3.3.2. Найти отношение сигнал-шум  $\rho$  в полосе сигнала, полагая, что сигнал — узкополосный процесс со средним квадратом значения огибающей  $\overline{A^2}$ , а флуктуационный шум порожден тепловым движением электронов при абсолютной температуре проводника  $T$ .

3.3.3. Решить задачу 3.3.2 для вариантов числовых значений величин, заданных в табл. 3.9.

Таблица 3.9

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F \cdot 10^{-8}$ , Гц	4	9	4	8	7	5	2	8	10	2	2	8
$\overline{A^2}$ , мкВт	4	6	3	1	7	8	4	8	10	3	8	6
$T$ , град	273	294	153	281	335	391	243	246	309	333	375	513

3.3.4. Узкополосный сигнал со средней мощностью  $P_c = 100$  мкВт принимается на фоне гауссовского стационарного шума, который в полосе сигнала ( $f_0 - \Delta f$ ,  $f_0 + \Delta f$ ) имеет равномерный энергетический спектр  $N_0 = 10^{-8}$  Вт/Гц. Найти вероятность появления

\* Пороговый уровень средней мощности сигнала  $P_{пор}$  различен для разных систем связи и определяется так, что при превышении помехой этого порога качество связи резко ухудшается.

флуктуационной помехи  $\rho_{ф.п}$ , средняя мощность которой превышает пороговый уровень  $P_{пор} = 4P_c$ , при  $\Delta f = 5$  кГц.

3.3.5. Решить задачу 3.3.4 для числовых значений величин, приведенных в табл. 3.10.

Таблица 3.10

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_c$ , мкВт	0,8	0,1	8	3	30	9	300	400	40	90	5	700
$\Delta f$ , кГц	5	7	7	8	1	9	4	6	2	1	9	10
$N_0$ , Вт/Гц	$10^{-8}$	$10^{-8}$	$10^{-8}$	$10^{-8}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-8}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$
$K$	3	3	2	2	4	4	9	8	4	5	5	6

3.3.6. Найти отношение сигнал-шум, полагая, что сигнал такой же, как в предыдущей задаче, а стационарный шум имеет энергетический спектр  $G(f) = A \exp[-B(f-f_0)^2]$ ,

$$B = (1,65/\Delta f)^2 \text{ с}^2, A = 7 \cdot 10^{-9} / \sqrt{2\pi} \text{ Вт/Гц.}$$

3.3.7. При каком соотношении между пороговым уровнем и полосой анализа сигнала  $F$  вероятность появления сосредоточенной помехи, превышающей порог, остается неизменной?

3.3.8. Некоторый источник выдает двоичные информационные посылки со скоростью  $I'$  посылок/с. По каналу связи с полосой  $F_k$  эта информация может передаваться с помощью

параллельного модема: информация передается параллельно на  $n$  независимых частотных поднесущих, причем каждая из них обеспечивает скорость передачи  $I'/n$ ;

последовательного модема: информация передается короткими посылками длительностью  $T = 1/I'$  на одной несущей (одноканальный вариант передачи).

Вероятность попадания сосредоточенной помехи со средней мощностью  $P_{с.п}$  в полосу канала связи близка к 1, в то время как вероятность попадания двух или более таких помех очень мала. Показать, что последовательный модем при той же средней мощности передатчика ( $P_{пер} = \text{const}$ ) и эффективности использования полосы ( $\gamma = I'/F_k = \text{const}$ ) обеспечивает в указанном канале большую верность, если  $P_{пер}/P_{с.п} < 1$ .

3.3.9. Пусть равновероятные символы А и Б двоичного источника для повышения качества передаются с помощью  $N = 2k + 1$  независимых частотных каналов (частотно-разнесенная система связи — ЧРСС), причем при передаче символа А в каждом канале передается 1, а при передаче символа Б — 0. Вероятность попадания сосредоточенной помехи в одну ветвь разнесения  $p_{с.п} = 10^{-1}$ .

В месте приема символы А и Б регистрируются на основе мажоритарного декодирования: если в большинстве частотных каналов зарегистрированы 1, принимается решение в пользу символа А, если же — 0, принимается решение в пользу Б. Найти вероятность правильного декодирования  $q$ , если  $N = 5$ .

Таблица 3.11

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$N$	9	7	5	7	5	7	11	5	7	3	9	11
$p_{с.п}$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	0,5	0,05	0,4	0,09	0,04	0,08	0,07	0,2	0,08	$10^{-3}$

3.3.10. Решить задачу 3.3.9 для вариантов числовых значений величин, заданных в табл. 3.11.

3.3.11. Пусть прием информации в ЧРСС (задача 3.3.9) ведется только по  $n \leq N$  ветвям, свободным на данном интервале времени от сосредоточенной помехи, причем до принятия решения в пользу символов А или Б сигналы отдельных ветвей складываются так, что вероятность ошибочного приема символов равна  $p_n$ .

Примем, что когда все ветви разнесения окажутся «забитыми» сосредоточенной помехой, прекращается передача информации по команде, переданной по каналу обратной связи.

Определить вероятность перерывов в передаче информации по каналу, вероятность передачи информации по линии, среднюю вероятность ошибочного приема символа.

3.3.12. Решить задачу 3.3.11 для числовых значений величин, заданных в табл. 3.12.

Таблица 3.12

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$N$	4	5	6	8	4	9	4	8	8	6	7	7
$n$	3	4	4	7	4	5	3	5	3	5	4	4
$p_{с.п}$	0,01	0,02	0,03	0,01	0,03	0,05	0,02	0,025	0,03	0,06	0,01	0,02
$p_n$	$10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$

3.3.13. Пусть отрезок гармонического сигнала длительностью  $T$  и с амплитудой  $U_m$  вместе с импульсной помехой после входного блока с полосой  $\Delta f$  подвергается двустороннему ограничению по напряжению с уровнем  $U_0$ . Примем, что импульсная помеха не нарушает качество связи, если ее энергия на входе решающего блока в 10 раз меньше энергии полезного сигнала:  $E_{и.п} < 0,1 E_c$ . Показать, что при  $U_0 = U_m$  качество связи не нарушается, если  $\Delta f > 10/I$ .

3.3.14. Для борьбы с импульсной помехой при передаче двоичных равновероятных символов источника 1 и 0 использовано их  $N$ -кратное повторение (избыточное кодирование), а в месте приема — мажоритарное декодирование. Полагая, что импульсные помехи попадают независимо в отдельные тактовые интервалы с вероятностью  $p_{и.п} = 0,01$ , вызывая при этом ошибочный переход, определить вероятность ошибочного приема символа при числе вет-

вей разнесения  $N=3$ . Определить, во сколько раз уменьшилась эта вероятность по сравнению с примитивным (безыбыточным) кодированием.

### 3.4. ПРОХОЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ЧЕРЕЗ КАНАЛ СВЯЗИ И ЕГО ЗВЕНЬЯ

Исследование преобразований случайных процессов при их прохождении через линейные динамические системы (как с регулярными, так и случайно меняющимися параметрами) связано с решением двух задач:

1) по данной корреляционной функции (энергетическому спектру) входного воздействия  $X(t)$  найти корреляционную функцию (энергетический спектр) отклика  $Y(t)$  динамической системы, заданной ее характеристиками;

2) зная многомерные распределения входного воздействия  $X(t)$ , найти многомерные распределения отклика  $Y(t)$  заданной динамической системы.

Вторая задача является более общей. Однако ее решение более сложно. Поэтому здесь для линейных систем общего вида ограничимся лишь решением первой задачи. Что касается прохождения случайных воздействий через нелинейные системы, то, рассматривая решение задач двух указанных выше типов, ограничимся классом безынерционных детерминированных нелинейных систем.

*Прохождение случайных процессов через линейные системы.* Исчерпывающей характеристикой линейной системы в общем виде (со случайно меняющимися параметрами) является случайная импульсная переходная характеристика  $G(t, \tau)$ . С ней связана случайная комплексная передаточная функция

$$K(j\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.14)$$

Зная  $K(j\omega, t)$ , обратным преобразованием Фурье получаем

$$G(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega, t) e^{j\omega\tau} df. \quad (3.15)$$

Отклик системы на воздействие  $X(t)$  определяется интегралом Дюамеля (с учетом физической осуществимости)

$$Y(t) = \int_0^{\infty} G(t, \tau) X(t-\tau) d\tau. \quad (3.16)$$

Корреляционная функция отклика  $Y(t)$  линейной системы со случайной характеристикой  $K(j\omega, t)$  на стационарное воздействие  $X(t)$  находится как

$$B_Y(t, t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} B_X(f, t, \tau) G_X(f) e^{j\omega\tau} df, \quad (3.17)$$

где  $B_X(t, t+\tau) = \overline{K(-j\omega, t)K(j\omega, t+\tau)}$  — корреляционная функция канала в общем случае со случайно меняющимися параметрами;  $G_X(f)$  — энергетический спектр воздействия.



Аналогично (3.17) определяется корреляционная функция отклика и при детерминированном воздействии, если под  $G_x(f)$  иметь в виду характеристику

$$G_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(j2\pi f)|^2}{T}, \quad (3.18)$$

где  $|S(j2\pi f)|$  — модуль спектральной плотности детерминированной функции.

Прохождение случайных процессов через нелинейные системы с детерминированными параметрами. Функции распределения выходного процесса  $Y(t)$  той или иной размерности при заданном распределении входного процесса  $X(t)$  и заданной характеристике преобразования системы  $y = \varphi(x)$  могут быть получены известными из теории вероятностей методами нахождения распределений функционально связанных случайных величин  $y$  и  $x$ .

Корреляционную функцию выходного процесса при известном двумерном распределении входного процесса  $w_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$  можно определить по формуле

$$B_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1) - \overline{Y(t_1)}] [\varphi(x_2) - \overline{Y(t_2)}] w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (3.19)$$

в то время как для определения математического ожидания выходного продукта достаточно знать одномерную плотность вероятности  $w_1(x; t)$ .

$$m_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) w_1(x; t) dx. \quad (3.20)$$

### Задачи

3.4.1. Показать, что отклик произвольной линейной системы  $Y(t)$  на случайное входное воздействие  $X(t)$  можно представить суммой четырех независимых слагаемых

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t) + Y_3(t) + Y_4(t),$$

где  $Y_1(t)$  — отклик детерминированной системы с характеристикой  $g(t, \tau) = \overline{G(t, \tau)}$  или  $k(j\omega, t) = \overline{K(j\omega, t)}$  на детерминированное воздействие  $m_x(t) = \overline{X(t)}$ ;  $Y_2(t)$  — отклик системы с центрированной характеристикой  $\hat{G}(t, \tau)$  или  $\hat{K}(j\omega, t)$  на детерминированное воздействие  $m_x(t)$ ;  $Y_3(t)$  — отклик детерминированной системы с характеристикой  $g(t, \tau)$  или  $k(j\omega, t)$  на центрированное воздействие  $\hat{X}(t)$ ;  $Y_4(t)$  — отклик системы с центрированной характеристикой  $\hat{G}(t, \tau)$  или  $\hat{K}(j\omega, t)$  на центрированное воздействие  $X(t)$ .

3.4.2. Показать, что для линейных систем, у которых передаточная функция не зависит от частоты  $K(j\omega, t) = K(t)$  (безынерционные линейные системы), корреляционная функция отклика связана с корреляционной функцией стационарного входного воздействия соотношением

$$B_y(t, t+\tau) = \overline{K(t)K(t+\tau)} B_x(\tau).$$

3.4.3. Показать, что если параметры системы не меняются во времени, т. е.  $K(j\omega, t) = K(j\omega)$ , энергетический спектр отклика  $G_y(f)$  связан с энергетическим спектром воздействия  $G_x(f)$  соотношением

$$G_y(f) = G_x(f) \overline{K(j\omega)K(-j\omega)} = G_x(f) |K(j\omega)|^2.$$

3.4.4. Последовательный колебательный контур с параметрами  $R, L, C$  находится под воздействием стационарного белого шума с энергетическим спектром  $N_0$ . Найти энергетический спектр и корреляционную функцию напряжения на емкости контура.

3.4.5. Решить задачу 3.4.4 для вариантов числовых значений величин, приведенных в табл. 3.13.

Таблица 3.13

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$L, \text{ мкГн}$	700	700	200	800	500	300	500	100	700	900	300	400
$R, \text{ Ом}$	3	5	1	7	9	9	2	10	4	2	5	8
$C, \text{ пФ}$	300	700	500	600	100	500	900	600	800	900	300	200
$N_0 \cdot 10^8, \text{ Вт/Гц}$	4	9	4	8	7	5	2	8	10	2	2	8

3.4.6. На вход канала с рассеянием во времени и по частоте с корреляционной функцией

$$B_n(f, \tau) = a \exp\left(-\alpha_1 \frac{|f|}{f_0} - \alpha_2 \frac{|\tau|}{\tau_0}\right)$$

поступает гармонический сигнал с частотой  $f_0$  и случайной амплитудой.

Найти энергетический спектр и корреляционную функцию выходного процесса.

3.4.7. Стационарный белый шум со спектральной плотностью мощности  $N_0 = 10^{-6}$  Вт/Гц поступает на вход цепи, изображенной на рис. 3.4. Найти энергетический спектр и корреляционную функцию выходного процесса для числовых значений величин, заданных в табл. 3.14.

Таблица 3.14

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$L, \text{ Гн}$	0,01	0,04	0,07	0,04	0,01	0,08	0,05	0,01	0,09	0,01	0,07	0,08
$R_1, \text{ Ом}$	7	7	2	8	5	3	5	10	9	9	9	2
$R_2, \text{ Ом}$	6	3	7	8	9	5	4	9	5	8	3	3

3.4.8. На вход идеальной длинной линии с линейно меняющейся во времени задержкой поступает стационарный случайный процесс с энергетическим спектром  $G(f)$ . Найти корреляционную функцию и энергетический спектр выходного процесса.

3.4.9. На вход синхронного детектора (перемножитель, выходной продукт которого подвергается низкочастотной фильтрации) поступает случайный процесс

$$Z(t) = k_{AM} b(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + X_n(t) \cos \omega_0 t + Y_n(t) \sin \omega_0 t,$$

который представляет собой аддитивную смесь БМ-сигнала и флуктуационного шума\*. Здесь  $\omega_0$  — несущая частота;  $b(t)$  — модулирующий сигнал с нулевым математическим ожиданием и полосой частот  $F_c$ ;  $X_n(t)$  и  $Y_n(t)$  — независимые, квадратурные компоненты гауссовского шума, у которых

$$m_x = m_y = 0; B_x(\tau) = B_y(\tau) = B(\tau) = N_0 F_c \frac{\sin 2\pi F_c \tau}{2\pi F_c \tau}.$$

Опорный сигнал  $u_r(t) = U_r \cos(\omega_0 t + \varphi_r)$ . Фильтр нижних частот в полосе  $F_c$  будем считать идеальным с единичным коэффициентом передачи. Определить:

одномерное распределение выходного продукта  $Y(t)$ , его математическое ожидание  $m_y(t)$ , дисперсию  $\sigma_y^2(t)$ ; корреляционную функцию и энергетический спектр для флуктуирующей части  $Y(t)$ ;

отношение сигнал-шум на входе  $\rho_{вх}$  и выходе  $\rho_{вых}$  детектора; выигрыш в отношении сигнал-шум  $g = \rho_{вых} / \rho_{вх}$ .

3.4.10. На вход синхронного детектора поступает смесь сигнала с угловой модуляцией и флуктуационного шума

$$Z(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \Theta(t) + \varphi_0) + X_n(t) \cos \omega_0 t + Y_n(t) \sin \omega_0 t,$$

где  $\Theta(t) = \Delta\phi b(t)$  при ФМ;  $\Theta(t) = \Delta\omega \int b(t) dt$  при ЧМ.

Определить те же характеристики, что и в задаче 3.4.9, полагая, что при детектировании ЧМ-сигнала к синхронному детектору подключается еще идеальная дифференцирующая цепь.

3.4.11. На вход безынерционного нелинейного устройства с характеристикой  $y = x^2$  поступает стационарный гауссовский шум с корреляционной функцией  $B_x(\tau) = \sigma_x^2 R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$ .

Определить одномерную плотность вероятности выходного продукта  $Y(t)$ , математическое ожидание  $m_y(t)$ , корреляционную функцию  $B_y(t, t+\tau)$  и энергетический спектр  $G_y(f)$ .

3.4.12. На вход линейного амплитудного детектора с характеристикой

$$y = \begin{cases} kx & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

\* Свойства шума считаются одинаковыми для всех нижеследующих задач этого раздела.

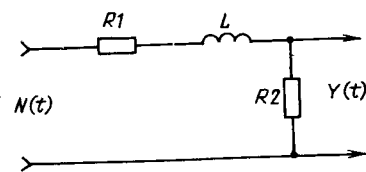


Рис 3.4 Схема линейной цепи (к задаче 3.4.7)

поступает случайный процесс  $Z(t) = [U_m(1 + mb(t)) + X_n(t)] \times \times \cos \omega_0 t + Y_n(t) \sin \omega_0 t$ , который представляет собой аддитивную смесь АМ-сигнала и стационарного гауссовского шума с равномерным энергетическим спектром  $N_0$  в полосе частот канала  $F_{\kappa} = = 2F_c$ . Определить при  $\overline{b(t)} = 0$ :

отношение сигнал-шум  $\rho_{вых}$  на выходе идеального ФНЧ, подключенного к линейному детектору;

отношение сигнал-шум на входе детектора  $\rho_{вх}$ ;

выигрыш в отношении сигнал-шум  $g = \rho_{вых} / \rho_{вх}$ .

### 3.5. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ. МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ КАНАЛОВ СВЯЗИ

Уравнения состояния  $X(t)$  и наблюдения  $Y(t)$  для  $n$ -мерной динамической системы (канала) в матричном виде имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= F[t, X(t)]X(t) + G[t, X(t)]U(t), \\ Y(t) &= H[t, X(t)]X(t), \quad t > t_0, \quad X(t_0) = X_0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где  $X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix}$  — вектор состояний со скалярными компонентами;

$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{X}_n(t) \end{bmatrix}$ ;  $U(t) = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{bmatrix}$  — вектор внешних воздействий;

$F, G, H$  — матрицы, размерность которых согласована с размерностями  $X(t), U(t)$ , характеризующие свойства системы (канала). Если внешнее воздействие (порождающий процесс) случайный гауссовский процесс типа белого шума с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей

$$B_n(t, t+\tau) = U(t)U^T(t+\tau) = Q\delta(\tau), \quad (3.22)$$

где  $T$  — знак транспонирования матрицы;  $Q$  — симметричная, неотрицательно определенная матрица, а функции (матрицы)  $F(t), G(t), H(t)$  удовлетворяют условиям непрерывности и ограниченности. Процессы  $X(t), X(t), Y(t)$ , определенные моделью (3.21), (3.22), являются марковскими. Их переходные плотности вероятности  $w(x, t|x_0, t_0)$  и  $w(x, y, t|x_0, y_0, t_0)$  подчинены соответствующим дифференциальным уравнениям в частных производных Колмогорова — Фоккера — Планка (2.14).

Если гауссовский порождающий процесс воздействует на линейную цепь (матрицы  $F, G, H$  не зависят от  $X(t)$ ), то и выходной процесс  $Y(t)$  будет гауссовским. Он будет также стационарным, если формирующая система является линейной с постоянными параметрами ( $F, G, H$  не зависят от  $X(t)$  и  $t$ ). Распределение процесса будет негауссовским, если он сформирован нелинейной системой.

Таким образом, метод переменных состояний позволяет представить случайный процесс  $Y(t)$  его марковским приближением. Часто при использовании ме-

туда переменных состояний для моделирования процессов в каналах со случайными меняющимися параметрами уравнения наблюдения пишут в виде

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{H}[t, \mathbf{X}(t)]\mathbf{X}(t) + \mathbf{N}(t), \quad (3.23)$$

где  $\mathbf{N}(t)$  — аддитивный (обычно гауссовский) шум, сопровождающий наблюдение. По заданному скалярному (одномерному) уравнению состояния (3.21) коэффициенты сноса  $A_1(x, t)$  и диффузии  $A_2(x, t)$ , входящие в уравнение Колмогорова — Фоккера — Планка (2.14), определяются формулами

$$A_1(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M\{[x(t + \Delta t) - x(t)] | x(t)\}, \\ A_2(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M\{[x(t + \Delta t) - x(t)]^2 | x(t)\}. \quad (3.24)$$

### Задачи

3.5.1. Напряжение в цепи описывается при внешнем воздействии  $u(t) = 1(t)$  уравнением  $n$ -го порядка с нулевыми начальными условиями

$$u(0) = u^{(1)}(0) = u^{(2)}(0) = \dots = u^{(n-1)}(0) = 0.$$

Написать уравнения состояния и наблюдения в скалярном и матричном виде и схему аналогового вычислителя, которая их реализует

3.5.2. Случайные процессы на выходе двух каналов связи описываются уравнениями состояния и наблюдения

$$\dot{\mathbf{X}}_1(t) = \mathbf{F}_1[t, \mathbf{X}_1(t)]\mathbf{X}_1(t) + \mathbf{G}_1[t, \mathbf{X}_1(t)]\mathbf{U}_1(t); \\ \mathbf{Y}_1(t) = \mathbf{H}_1[t, \mathbf{X}_1(t)]\mathbf{X}_1(t); \\ \mathbf{X}_2(t) = \mathbf{F}_2[t, \mathbf{X}_2(t)]\mathbf{X}_2(t) + \mathbf{G}_2[t, \mathbf{X}_2(t)]\mathbf{U}_2(t); \\ \mathbf{Y}_2(t) = \mathbf{H}_2[t, \mathbf{X}_2(t)]\mathbf{X}_2(t); \quad \mathbf{X}_1(0) = \mathbf{X}_{10}; \quad \mathbf{X}_2(0) = \mathbf{X}_{20}.$$

Покажите, что эти случайные процессы можно представить как выход векторного канала, описываемого уравнением состояния и наблюдения (3.21) с матрицами

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(t) \\ \mathbf{X}_2(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{10} \\ \mathbf{X}_{20} \end{bmatrix}.$$

3.5.3. Линейная цепь  $n$ -го порядка с постоянными параметрами определяется операторным коэффициентом передачи

$$K(p) = \frac{\lambda_1 p^{n-1} + \lambda_2 p^{n-2} + \dots + \lambda_n}{p^n + \psi_1 p^{n-1} + \dots + \psi_n} = \frac{L(p)}{Q(p)}. \quad (3.25)$$

Напишите линейное скалярное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами, описывающее в установившемся режиме

случайный процесс на выходе системы  $Y(t)$  с энергетическим спектром

$$G(f) = \frac{N_0}{2} |K(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} \left| \frac{\lambda_1 (j\omega)^{n-1} + \lambda_2 (j\omega)^{n-2} + \dots + \lambda_n}{(j\omega)^n + \psi_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + \psi_n} \right|^2$$

при воздействии на вход случайного стационарного белого гауссовского шума  $N(t)$  с энергетическим спектром  $N_0/2$  при нулевых начальных условиях.

3.5.4. Покажите, что скалярное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка, полученное в задаче (3.5.3), дается следующей скалярной системой уравнений состояния и наблюдения:

$$\dot{X}_1(t) = -\psi_1 X_1(t) + X_2(t) + \lambda_1 n(t); \\ \dot{X}_2(t) = -\psi_2 X_2(t) + X_3(t) + \lambda_2 n(t); \\ \dots \\ \dot{X}_{n-1}(t) = -\psi_{n-1} X_{n-1}(t) + X_n(t) + \lambda_{n-1} n(t); \\ \dot{X}_n(t) = -\psi_n X_n(t) + \lambda_n n(t); \\ Y(t) = X_1(t). \quad (3.26)$$

Нарисуйте аналоговый вычислитель, реализующий уравнение (3.26).

3.5.5. Покажите, что система (3.26) реализуется матричным уравнением (3.21) с матрицами

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\psi_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\psi_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\psi_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = [1 \ 0 \dots 0].$$

3.5.6. Покажите, что стационарный гауссовский марковский процесс  $S(t)$  с корреляционной функцией

$$B_s(t_2, t_1) = P_c \exp(-\alpha |t_2 - t_1|) \left( G_s(f) = \frac{2P_c \alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} = \left| \frac{\alpha}{\alpha + j2\pi f} \right|^2 \frac{2P_c}{\alpha} \right)$$

можно при нулевых начальных условиях задать уравнением состояния

$$\dot{S}(t) = -\alpha S(t) + \sqrt{2\alpha P_c} V(t), \quad S(-\infty) = 0, \quad (3.27)$$

$V(t)$  — центрированный белый шум с единичной спектральной плотностью. Воспользоваться методом перехода от изображения  $K(p) = \alpha/(p + \alpha)$  \* к оригиналу. Принять, что  $2P_c/\alpha$  — спектральная плотность порождающего шума.

\* Линейная цепь с постоянными параметрами (интегрирующая RC-цепочка параметром  $\alpha = 1/RC$ ) с комплексным коэффициентом передачи  $K(j\omega) = \alpha/(\alpha + j2\pi f)$  или операторным коэффициентом передачи  $K(p) = \alpha/(p + \alpha)$  реализуема (полос лежит в левой полуплоскости переменного  $p$ ), в то время как цепь с операторным коэффициентом передачи  $K(p) = \alpha/(p - \alpha)$  нереализуема (полос лежит в правой полуплоскости)

3.5.7. Стохастическое дифференциальное уравнение имеет вид

$$\dot{X}(t) = f(x, t) + g(x, t)n(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (3.28)$$

$$B_n = \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1).$$

Покажите, что коэффициенты сноса и диффузии определяются уравнениями

$$A_1(x, t) = f(x, t) + \frac{1}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x}; \quad A_2(x, t) = \frac{1}{2} N_0 g^2(x, t),$$

а стационарная плотность вероятности при нулевых граничных условиях

$$\omega(x) = \frac{c}{g(x)} \exp\left(\frac{4}{N_0} \int \frac{f(x)}{g(x)} dx\right). \quad (3.29)$$

3.5.8. Стохастическое дифференциальное уравнение определяется выражением (3.28) при  $x > 0$ . При какой нелинейной функции  $f(x)$  стационарная плотность  $\omega(x)$  определяется законом Рэлея:

$$\omega(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp(-x^2/2\sigma^2), \quad x > 0.$$

3.5.9. Операторный коэффициент передачи (3.25) реализуемой цепи разлагается на сумму простых дробей

$$K(p) = \sum_{k=1}^n \alpha_k / (p + p_k), \quad \alpha_k = L(p_k) / Q'(p_k).$$

С учетом принципа наложения показать, что дифференциальное уравнение цепи (уравнения состояния) с учетом нулевых начальных условий имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= -p_1 X_1(t) + \alpha_1 n(t) \\ \dot{X}_2(t) &= -p_2 X_2(t) + \alpha_2 n(t) \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{X}_n(t) &= -p_n X_n(t) + \alpha_n n(t) \\ Y(t) &= \sum_k X_k(t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Построить аналоговый вычислитель, реализующий эти уравнения состояния. Сравнить его схему со схемой вычислителя, полученной в задаче (3.5.4) ( $p_k$  — корни уравнения  $Q(p) = 0$ ).

3.5.10. Покажите, что система (3.30) реализуется матричными уравнениями (3.21) и (3.22) с матрицами

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = [1, 1, \dots, 1].$$

#### 4.1. КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ. ЭНТРОПИЯ И ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО ИСТОЧНИКА СООБЩЕНИЙ

Количество информации  $I(a_i)^*$ , содержащееся в символе  $a_i$ , выбираемом из ансамбля  $\{a_i\}$  ( $j=1, 2, 3, \dots, K$ , где  $K$  — объем алфавита) с вероятностью  $P(a_i)$ , причем  $\sum_{i=1}^K P(a_i) = 1$ , определяется как

$$I(a_i) = -\log P(a_i). \quad (4.1)$$

Основание логарифма в (4.1) может быть произвольным, оно определяет лишь систему единиц измерения количества информации. Чаще всего

$$I(a_i) = -\log_2 P(a_i). \quad (4.2)$$

При этом информация измеряется в двоичных единицах (битах). Одна двоичная единица информации — это количество информации, содержащееся в одном из двух выбираемых с равной вероятностью символов.

Среднее количество информации  $H(A)$ , приходящееся на один символ, выдаваемый дискретным источником независимых сообщений с объемом алфавита  $K$ , можно найти как математическое ожидание дискретной случайной величины  $I(a_i)$ , определяющей количество информации, содержащееся в одном случайно выбранном символе (знаке):

$$H(A) = \overline{I(a_i)} = - \sum_{i=1}^K P(a_i) \log P(a_i). \quad (4.3)$$

Эта величина называется энтропией источника независимых сообщений.

Одной из информационных характеристик дискретного источника является избыточность

$$\varkappa = 1 - H(A) / H_{\max}(A) = 1 - H(A) / \log K. \quad (4.4)$$

Избыточность источника зависит как от протяженности статистических связей между последовательно выбираемыми символами (памяти источника), так и от степени неравновероятности отдельных символов. Если источник без памяти (последовательно передаваемые символы независимы), все символы равновероятны ( $p(a_i) = 1/K$ ), то  $H(A) = H_{\max}(A)$  и избыточность  $\varkappa = 0$ .

\* Эта характеристика определяет информативность выбора символа для «неподготовленного» получателя и совершенно не учитывает как смысловое содержание, так и субъективную ценность передаваемых сообщений.

Если в единицу времени источник выдает в среднем  $v_n$  символов (скорость источника  $v_n$ ), то среднее количество информации, создаваемое источником в единицу времени,

$$H'(A) = v_n H(A) = H(A)/T_{cp}, \quad (4.5)$$

где  $T_{cp}$  — средняя длительность одного символа.

Характеристику  $H'(A)$  называют производительностью дискретного источника. Источник называется стационарным, если описывающие его вероятностные характеристики не меняются во времени.

### Задачи

**4.1.1.** Источник сообщений выдает символы из ансамбля  $A = \{a_i\}$  (здесь  $i=1, 2, 3, 4$ ) с вероятностями  $P(a_1)=0,2$ ;  $P(a_2)=0,3$ ;  $P(a_3)=0,4$ ;  $P(a_4)=0,1$ . Найти количество информации, содержащееся в каждом из символов источника при их независимом выборе (источник без памяти). Вычислить энтропию и избыточность заданного источника.

**4.1.2.** Решить задачу 4.1.1 для источников сообщений, распределения вероятностей которых приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(a_1)$	0,1	0,1	0,03	0,4	0,5	0,06	0,4	0,24	0,24	0,1	0,2	0,02
$P(a_2)$	0,25	0,05	0,26	0,25	0,04	0,15	0,18	0,18	0,28	0,1	0,1	0,5
$P(a_3)$	0,15	0,04	0,09	0,05	0,03	0,15	0,1	0,38	0,05	0,1	0,3	0,03
$P(a_4)$	0,15	0,01	0,05	0,3	0,15	0,07	0,1	0,1	0,22	0,2	0,25	0,15
$P(a_5)$	0,3	0,2	0,16	—	0,04	0,05	0,07	0,06	0,15	0,35	0,15	0,04
$P(a_6)$	0,05	0,03	0,1	—	0,12	0,29	0,06	0,02	0,06	0,15	—	0,12
$P(a_7)$	—	0,07	0,09	—	0,1	0,19	0,05	0,02	—	—	—	0,04
$P(a_8)$	—	0,5	0,22	—	0,02	0,04	0,04	—	—	—	—	0,1

**4.1.3.** Показать, что для источника без памяти с объемом алфавита  $K$  энтропия  $H(A)$  имеет максимальное значение  $H_{\max}(A) = \log K$  при равновероятных символах.

**4.1.4.** Показать, что при равных объемах алфавитов  $K$  энтропия дискретного источника с памятью  $H(A/A')$  не превышает энтропию дискретного источника без памяти  $H(A)$ .

**4.1.5.** Память двоичного стационарного источника с символами 0 и 1 простирается лишь на два соседних символа и, следовательно, дискретная последовательность символов, выдаваемых источником, описывается простой цепью Маркова с матрицей переходных вероятностей:

$$\begin{pmatrix} P(1|1') & P(1|0') \\ P(0|1') & P(0|0') \end{pmatrix},$$

где  $P(a_i|a'_j)$  — вероятность символа  $a_i$  при условии, что ему предшествует символ  $a'_j$ .

Полагая, что  $P(1|1')=0,9$ ;  $P(0|1')=0,1$ ;  $P(1|0')=0,7$ , найти энтропию источника и его избыточность. Найти энтропию и избыточность двоичного источника без памяти, но с теми же значениями вероятностей передачи символов.

**4.1.6.** Решить задачу 4.1.5 для дискретных стационарных источников, заданных матрицами переходных вероятностей:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{pmatrix} 0,98 & 0,7 \\ 0,02 & 0,3 \end{pmatrix}; & 2) \begin{pmatrix} 0,75 & 0,4 \\ 0,25 & 0,6 \end{pmatrix}; & 3) \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}; \\ 4) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,7 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}; & 5) \begin{pmatrix} 1,65 & 0,65 \\ 0,35 & 0,35 \end{pmatrix}; & 6) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,9 \\ 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}; \\ 7) \begin{pmatrix} 0,35 & 0,35 \\ 0,65 & 0,65 \end{pmatrix}; & 8) \begin{pmatrix} 0,71 & 0,82 \\ 0,29 & 0,18 \end{pmatrix}; & 9) \begin{pmatrix} 0,7 & 0,56 \\ 0,3 & 0,44 \end{pmatrix}; \\ 10) \begin{pmatrix} 0,97 & 0,82 \\ 0,03 & 0,18 \end{pmatrix}; & 11) \begin{pmatrix} 0,59 & 0,5 \\ 0,41 & 0,5 \end{pmatrix}; & 12) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{array}$$

**4.1.7.** Стационарный источник выдает за время  $T=10^6$  с двоичными посылками длительности  $\tau=10$  мс  $10^7$  бит информации. За какое время и каким количеством двоичных посылок можно передать тот же объем информации, если соответствующей обработкой полностью устранить избыточность источника? Определить избыточность источника.

**4.1.8.** Найти максимальное количество информации, которое содержится в квантованном телевизионном сигнале, соответствующем одному телевизионному кадру при 625 строках разложения, при условии, что сигнал, соответствующий одной строке изображения, представляет собой последовательность 833 (при отношении сторон кадра 4/3) статистически независимых случайных по амплитуде импульсов, каждый из которых с равной вероятностью принимает одно из 16 значений. Найти избыточность телевизионного сигнала, если фактически кадр изображения с 16 градациями уровней содержит  $9,37 \cdot 10^5$  бит информации.

**4.1.9.** Согласно экспериментальным данным безусловные вероятности букв русского алфавита характеризуются табл. 4.2.

Найти энтропию источника, выдающего текст из этих букв, при отсутствии статистических связей между буквами. Вычислить избыточность источника, выдающего русский текст, обусловленную неравновероятностью выбора букв, а также и их статистическими связями (памятью источника), если по экспериментальным данным энтропия источника  $H(A)=1$  бит/символ.

**4.1.10.** Решить задачу 4.1.9 для источника, выдающего текст из букв английского алфавита, безусловные вероятности которых приведены в табл. 4.3.

При вычислении избыточности текста принять во внимание, что с учетом 8-буквенных сочетаний энтропия  $H(A)=1,86$  бит/символ.

**4.1.11.** Напряжение на выходе квантующего устройства может принимать одно из 17 дискретных значений с шагом квантования

Таблица 4.2

Буква	Вероятность	Буква	Вероятность	Буква	Вероятность
Пробел	0,175	к	0,028	ч	0,012
о	0,090	м	0,026	й	0,010
е	0,072	д	0,025	х	0,009
а	0,062	п	0,023	ж	0,007
и	0,062	у	0,021	ю	0,006
т	0,053	я	0,018	ш	0,006
н	0,053	ы	0,016	ц	0,004
с	0,045	з	0,016	щ	0,003
р	0,040	ь, ъ	0,014	э	0,002
в	0,038	б	0,014	ф	0,002
л	0,035	г	0,013		

Таблица 4.3

Буква	Вероятность	Буква	Вероятность	Буква	Вероятность
Пробел	0,2	h	0,047	w	0,012
e	0,105	d	0,035	g	0,011
t	0,072	l	0,028	b	0,010
o	0,065	c	0,023	v	0,008
a	0,063	f	0,023	k	0,003
n	0,058	u	0,023	x	0,001
i	0,055	m	0,021	j	0,001
r	0,052	p	0,018	q	0,001
s	0,052	y	0,012	z	0,001

Δ. На вход квантующего устройства поступают независимые временные отсчеты (с интервалом  $\Delta t = 0,3$  с) сигнала с экспоненциальной плотностью вероятности мгновенных значений

$$w_1(x) = (2a)^{-1} \exp(-|x|/a),$$

где  $a = 0,5$  В,  $x_{\max} = 1,6$  В,  $\Delta = 0,2$  В. Определить энтропию квантованного сигнала, его избыточность, скорость создания информации на выходе квантующего устройства (производительность).

4.1.12. Решить задачу 4.1.11 для сигнала с плотностью вероятности мгновенных значений  $w_1(x) = (2\pi a)^{-0,5} \exp[-x^2/(2a)]$  для вариантов числовых значений, заданных в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a, В <sup>2</sup>	0,5	0,2	0,5	0,2	0,5	0,2	0,9	0,7	0,7	0,3	0,8	0,2
$x_{\max}$ , В	1,6	0,4	0,8	2,4	4,8	3,2	4	6,4	5,6	4,8	3,2	1,6
Δ, В	0,2	0,05	0,1	0,3	0,6	0,4	0,5	0,8	0,7	0,6	0,4	0,2

4.1.13. Для устранения статистических связей символов источника (их «декорреляции») в целях повышения эффективности свя-

зи иногда прибегают к перекодировке, которая сводится к сопоставлению блока из  $n > 1$  символов первичного алфавита новому символу «укрупненного» алфавита. Показать, что этот способ устранения связей символов не изменяет избыточность сообщений.

4.1.14. После устранения статистических связей символов укрупненный алфавит характеризуется восемью символами, вероятности которых даны в табл. 4.5. Показать, что использование неравномерного двоичного кода, указанного в табл. 4.5 (это экономный код Хаффмена, который более вероятным символам сопоставляет более короткие кодовые комбинации), позволяет почти полностью устранить избыточность.

Таблица 4.5

Номер символа	Вероятность	Код	$n_i$
1	0,6	1	1
2	0,2	10	2
3	0,1	100	3
4	0,04	1000	4
5	0,025	10000	5
6	0,015	100000	6
7	0,01	1000000	7
8	0,01	10000000	8

## 4.2. КОЛИЧЕСТВО И СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ПО ДИСКРЕТНОМУ КАНАЛУ. ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО КАНАЛА. ТЕОРЕМА КОДИРОВАНИЯ ДЛЯ КАНАЛОВ С ШУМАМИ

\* Если на вход канала с шумами поступают символы  $b_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ), а с выхода снимаются символы  $\hat{b}_j$  ( $j=1, 2, \dots, m'$ ), то условные вероятности переходов  $P(\hat{b}_j|b_i)$ , а также и апостериорные вероятности  $P(b_i|\hat{b}_j)$  удовлетворяют соотношениям\*

$$0 < P(\hat{b}_j|b_i) < 1; 0 < P(b_i|\hat{b}_j) < 1. \quad (4.6)$$

Это означает, что при фиксированном символе  $\hat{b}_j$  нельзя с полной определенностью утверждать, какой символ  $b_i$  передавался. Следовательно, часть информации, содержащейся в символе  $b_i$ , оказалась потерянной.

Среднее количество информации, теряемой при передаче произвольного символа по каналу без памяти,

$$\begin{aligned} I(B|\hat{B}) &= H(B|\hat{B}) = - \sum_{j=1}^{m'} \sum_{i=1}^m P(b_i|\hat{b}_j) P(\hat{b}_j) \log P(b_i|\hat{b}_j) = \\ &= - \sum_{j=1}^{m'} \sum_{i=1}^m P(b_i, \hat{b}_j) \log \frac{P(b_i, \hat{b}_j)}{P(\hat{b}_j)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

\* Для канала без шумов эти вероятности равны 0, если  $j \neq i$ , и равны 1, если  $j = i$ .

Эта величина называется ненадежностью канала и показывает степень неопределенности последовательности входных символов  $B$  при условии, что принята последовательность  $\hat{B}$ .

Средним количеством переданной по каналу информации на один символ называется разность между количеством информации на входе канала  $I(B)$  и количеством информации, потерянной в канале,  $I(B|\hat{B})$ .

Для источника и канала без памяти

$$I(B, \hat{B}) = I(B) - I(B|\hat{B}) = H(B) - H(B|\hat{B}) = \\ = \sum_{j=1}^{m'} \sum_{i=1}^m P(b_i, \hat{b}_j) \log \frac{P(b_i, \hat{b}_j)}{P(b_i)P(\hat{b}_j)}. \quad (4.8)$$

Это среднее количество информации на один символ, содержащееся в выходной последовательности  $\hat{B}$  относительно входной последовательности  $B$ . Поскольку  $0 \leq H(B|\hat{B}) \leq H(B)$  (условная энтропия никогда не превосходит безусловную), то  $0 \leq I(B, \hat{B}) \leq I(B)$ . Количество информации  $I(B, \hat{B}) = 0$ , если символы на входе и выходе независимы (очень сильные помехи или обрыв канала связи), и  $I(B, \hat{B}) = I(B)$ , если помехи отсутствуют.

Из (4.8) следует, что

$$I(B, \hat{B}) = I(\hat{B}, B) = H(\hat{B}) - H(\hat{B}|B). \quad (4.9)$$

Величина

$$H(\hat{B}) = I(\hat{B}) \quad (4.10)$$

определяет информацию (энтропию) выходных символов канала. Часть этой информации является полезной (информация о входных символах  $b_i$ ). Остальная часть информации является ложной (созданной помехами в канале). Величина  $H(\hat{B}|B) = I(B|\hat{B})$  определяет информацию, содержащуюся в последовательности выходных символов  $\hat{B}$  при известной последовательности входных символов  $B$ . Поскольку выходная последовательность отличается от входной исключительно из-за помех в канале, то  $H(\hat{B}|B)$  характеризует информацию именно о помехах в канале или энтропию шума:

$$H(\hat{B}|B) = - \sum_{j=1}^{m'} \sum_{i=1}^m P(b_i, \hat{b}_j) \log P(\hat{b}_j|b_i). \quad (4.11)$$

Если на вход дискретного канала поступает в среднем  $v_k$  символов в единицу времени, то можно определить среднюю скорость передачи информации по каналу с шумами:

$$I'(B, \hat{B}) = v_k I(B, \hat{B}) = H'(B) - H'(B|\hat{B}) = H'(B) - H'(\hat{B}|B). \quad (4.12)$$

Здесь  $H'(B)$  — производительность источника на входе канала;  $H'(B|\hat{B})$  — ненадежность канала в единицу времени;  $H'(\hat{B})$  — производительность источника, образованного выходом канала;  $H'(\hat{B}|B)$  — количество ложной информации, создаваемой шумом в единицу времени.

Пропускной способностью канала называется предельная скорость передачи информации при заданных свойствах канала (заданной помехе). Для дискретного канала пропускная способность

$$C = v_k \max I(B, \hat{B}), \quad (4.13)$$

причем  $\max$  ищется по всем возможным источникам входа при заданном  $v_k$  и объеме алфавита символов входа  $m^*$ .

С понятием пропускной способности канала связана одна из важнейших теорем теории информации — основная теорема К. Шеннона об оптимальном кодировании. Применительно к дискретному источнику эта теорема гласит: если производительность источника сообщений меньше пропускной способности канала

$$H'(A) < C, \quad (4.14)$$

то существует способ оптимального кодирования и декодирования (преобразования сообщения в сигнал на передаче и обратного его преобразования в сообщение на приеме), при котором вероятность ошибки может быть сделана как угодно малой. Если  $H'(A) > C$ , такого способа не существует.

Средняя вероятность ошибки при оптимальном кодировании определяется соотношением

$$p_{\text{ош}} \approx 2^{-T[C - H'(A)]}, \quad (4.15)$$

где  $T$  — длительность сигнала, соответствующего последовательности символов источника достаточно большой длины  $n$ ;  $C - H'(A)$  — запас пропускной способности канала.

Для дискретного канала без шумов теорема оптимального кодирования формулируется следующим образом: если производительность источника меньше пропускной способности канала, то существуют способы кодирования, при которых передача сообщений может осуществляться со скоростью

$$v_c = v_k / H(A) - \epsilon, \quad (4.16)$$

где  $v_k$  — скорость передачи двоичных кодовых символов;  $\epsilon$  — как угодно малая положительная величина.

Из этой теоремы следует, что при оптимальном (по Шеннону) кодировании можно на один символ источника затратить

$$n \approx H(A) \quad (4.17)$$

кодовых символов.

**Задачи**

4.2.1. Найти ненадежность  $H(B|\hat{B})$  и энтропию шума двоичного симметричного канала со стиранием (рис. 4.1) с вероятностями переходов  $P(\hat{0}|0) = P(\hat{1}|1) = 1 - p_0 - p_c$ ;  $P(\hat{?}|0) = P(\hat{?}|1) = p_c$ ;  $P(\hat{1}|0) = P(\hat{0}|1) = p_0$  и априорными вероятностями символов  $P(0)$  и  $P(1) = 1 - P(0)$ .

4.2.2. Показать, что в симметричном  $m$ -ичном канале без памяти и стираний энтропия шума определяется выражением

$$H(\hat{B}|B) = -p \log[p/(m-1)] - (1-p) \log(1-p),$$

где  $p$  — суммарная вероятность ошибки.

\* Строго говоря,  $C$  следует определить как наименьшую верхнюю границу от  $I(B, \hat{B})$ , так как одно единственное максимальное значение скорости по всем возможным источникам входа может и не существовать.

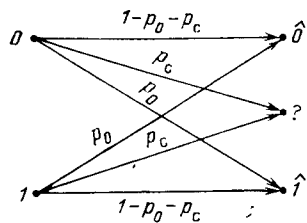


Рис. 4.1. Граф двоичного симметричного канала со стиранием

$I(B, \hat{B}) = v_k(1-p_c)H(B)$ , где  $v_k$  — число символов, поступающих на вход канала в единицу времени.

Таблица 4.6

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$H(B) \cdot 10^{-3}$ , бит/символ	1	4	9	4	8	7	5	2	8	10
$H(\hat{B}) \cdot 10^{-3}$ , бит/символ	1	9	15	7	9	10	6	4	11	12
$H(B \hat{B}) \cdot 10^{-3}$ , бит/символ	200	400	900	500	200	800	1000	290	200	800

4.2.5. На вход дискретного канала поступает  $H(B)$  бит/символ, а по каналу в среднем передается  $I(B, \hat{B})$  бит/символ полезной информации. Энтропия шума в канале  $H(\hat{B}|B)$  бит/символ.

Найти ненадежность канала и энтропию выходных символов. Определить производительность источника на входе канала, ненадежность канала в единицу времени, среднюю скорость передачи информации по каналу и скорость создания ложной информации в канале, если на вход канала поступает в среднем  $v_k$  символ/с (значения  $H(B)$ ,  $I(B, \hat{B})$ ,  $H(\hat{B}|B)$ ,  $v_k$  даны в табл. 4.7).

Таблица 4.7

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$H(B)$	20	40	90	40	80	70	50	80	200	60
$I(B, \hat{B})$	10	30	70	20	40	60	20	30	100	50
$H(\hat{B} B)$	40	60	120	60	120	100	80	90	300	90
$v_k$	50	40	90	70	60	100	100	75	100	80

4.2.6. Показать, что для  $m$ -ичного симметричного канала без памяти и стирания с вероятностями переходов

$$P(\hat{b}_j|b_i) = \begin{cases} 1-p & \text{при } j=i, \\ \frac{p}{m-1} & \text{при } j \neq i \end{cases}$$

4.2.3. Найти энтропию шума в двоичном канале без памяти по заданной энтропии источника на входе канала  $H(\hat{B})$ , энтропии источника, образованного выходом канала  $H(B)$  и ненадежности канала  $H(B|\hat{B})$  (значения  $H(B)$ ,  $H(\hat{B})$ ,  $H(B|\hat{B})$  даны в табл. 4.6).

4.2.4. Показать, что при вероятности ошибки, стремящейся к нулю, скорость передачи информации по двоичному симметричному каналу со стиранием (задача 4.2.1) определяется соотношением

пропускная способность определяется соотношением

$$C = v_k \left[ \log m + (1-p) \log(1-p) + p \log \frac{p}{m-1} \right].$$

Упростить эту формулу для двоичного канала. Построить график зависимости пропускной способности двоичного канала от вероятности ошибки.

4.2.7. Найти пропускную способность  $m$ -ичного симметричного канала без памяти и стирания по числовым значениям, приведенным в табл. 4.8.

Таблица 4.8

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v_k$	700	700	200	800	500	300	500	1000	700	900
$m$	4	6	3	7	8	4	10	3	8	6
$p$	0,1	0,01	0,2	0,02	0,15	0,015	0,01	0,01	0,02	0,003

4.2.8. Показать, что избыточность оптимального по Шеннону кода определяется соотношением

$$\kappa_{\text{к.мин}} = 1 - C / (v_k \log m) + \epsilon$$

( $\epsilon$  — сколь угодно малая положительная величина).

Найти минимально возможную избыточность оптимального кода для двоичного канала при вероятности ошибки  $p=0$  и  $0,5$ .

4.2.9. Показать, что способы кодирования и декодирования, обеспечивающие сколь угодно малую вероятность ошибки, существуют лишь в случае, когда среднее число символов кода на один символ источника удовлетворяет условию

$$\bar{n} = \frac{v_k}{v_{\text{и}}} > \frac{H(A)}{\max I(B, \hat{B})}.$$

4.2.10. Какой запас пропускной способности  $C - H'(A)$  должен иметь канал, чтобы при использовании оптимального кода с длительностью кодовой комбинации  $T=100$  мс вероятность ошибки не превысила величину  $10^{-6}$ ?

Во сколько раз изменится длительность кодовой комбинации оптимального кода, если при неизменной вероятности ошибки запас пропускной способности канала уменьшается в 2 раза?

4.2.11. Показать, что вероятность ошибки в канале с шумами не может быть сколь угодно малой, если пропускная способность канала  $C$  меньше производительности  $H'(A)$ .

4.2.12. Некоторый дискретный источник выдает символы из ансамбля  $\{a_i\}$ ,  $i=1, 9$  с вероятностями, приведенными в табл. 4.9.

Закодировать символы данного ансамбля кодом Хаффмена. Построить граф кода и определить среднюю длину кодовой комбинации



Т а б л и ц а 4.9

Символ	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$
$P(a_i)$	0,2	0,15	0,15	0,12	0,1	0,1	0,08	0,06	0,04

нации. Сравнить полученный результат с минимальной длиной кодовой комбинации при кодировании равномерным двоичным кодом. Показать, что код Хаффмена близок к оптимальному по Шеннону коду.

4.2.13. Закодировать кодом Хаффмена символы источника, появляющиеся с вероятностями  $P(a_1) = P(a_2) = 1/4$ ,  $P(a_3) = P(a_4) = 1/8$ ,  $P(a_5) = P(a_6) = P(a_7) = P(a_8) = 1/16$ . Какую экономию в числе кодовых разрядов на один символ источника дает этот код по сравнению со случаем равномерного двоичного кода?

4.2.14. Построить код Хаффмена для шести сообщений  $A, B, C, D, E, F$ , появляющихся с вероятностями 0,4; 0,25; 0,15; 0,1; 0,05; 0,05. Построить кодовое дерево, вычислить среднюю длину кодовой комбинации и сравнить ее с энтропией сообщения.

4.2.15. Закодировать двоичным кодом Шеннона — Фано ансамбль сообщений  $\{a_i\}$ ,  $i = \overline{1, 8}$ , если вероятности символов имеют следующие значения:  $P(a_1) = P(a_2) = 1/4$ ;  $P(a_3) = P(a_4) = 1/8$ ;  $P(a_5) = P(a_6) = P(a_7) = P(a_8) = 1/16$ . Найти среднее число разрядов в кодовой комбинации. Показать, что такой код близок к оптимальному.

4.2.16. Построить код Шеннона — Фано для сообщений, заданных в задаче 4.2.14. Вычислить среднюю длину кодовой комбинации и сравнить ее с энтропией сообщения.

4.2.17. Построить код Шеннона — Фано для сообщений  $A, B, C, D$ , если они имеют вероятности а) 0,5; 0,25; 0,125; 0,125; б) 0,6; 0,2; 0,15; 0,05. Для обоих случаев сравнить среднюю длину кодовой комбинации с энтропией сообщения.

### 4.3. ЭНТРОПИЯ И ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ НЕПРЕРЫВНОГО ИСТОЧНИКА СООБЩЕНИЙ

Для описания информационных свойств непрерывного источника широко используется понятие дифференциальной энтропии  $h(X)$ :

$$h(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) \log w_1(x) dx \quad (4.18)$$

Это та часть энтропии непрерывного источника, которая зависит от функции плотности вероятности сигнала  $X(t)$ , выдаваемого источником.

Наибольшее значение дифференциальной энтропии при независимых отсчетах и заданной дисперсии  $\sigma^2$  имеет случайный процесс  $X(t)$  с гауссовским распределением мгновенных значений. В этом случае

$$h_{\max}(X) = \log \sqrt{2\pi e \sigma^2} \quad (4.19)$$

По аналогии с формулами для дискретного источника количество информации, содержащееся в одном непрерывном отсчете процесса  $Y(t)$  относительно отсчета процесса  $X(t)$ , определяется формулой

$$I(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) \log \frac{w_2(x, y)}{w_1(x) w_1(y)} dx dy \quad (4.20)$$

Здесь  $w_2(x, y)$  — совместная плотность вероятности процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$ .

Величину  $I(X, Y)$  можно представить так:

$$I(X, Y) = h(X) - h(X|Y) = h(Y) - h(Y|X) \quad (4.21)$$

Здесь  $h(X)$ ,  $h(Y)$  — соответственно дифференциальная энтропия на отсчет процесса  $X(t)$  и  $Y(t)$ ;

$$h(X|Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y) \log w_1(x|y) dx dy \quad (4.22)$$

— условная дифференциальная энтропия отсчета  $X(t)$  при известном отсчете  $Y(t)$ ;

$$h(Y|X) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y) \log w_1(y|x) dx dy \quad (4.23)$$

— условная дифференциальная энтропия отсчета  $Y(t)$  при известном отсчете  $X(t)$ .

Эпсилон-энтропией  $H_\epsilon(X)$  непрерывного источника, или собственной информацией в одном отсчете процесса  $X(t)$ , будем называть минимальное количество информации, необходимое для воспроизведения сигнала  $X(t)$  по сигналу  $X'(t)$  с допустимой дисперсией ошибки  $\sigma_n^2$ :

$$H_\epsilon(X|X') = \min I(X, X') = h(X|X') - \log \sqrt{2\pi e \sigma_n^2} \quad (4.24)$$

$H_\epsilon(X|X')$  — это эпсилон-энтропия на один отсчет при условии, что отсчеты сигнала фиксированы;  $h(X|X')$  — дифференциальная энтропия отсчета сигнала при условии, что отсчеты сигнала фиксированы.

Если источник выдает независимые отсчеты непрерывного сообщения дискретно во времени, то его эпсилон-производительность

$$H'_\epsilon(X|X') = v_n H_\epsilon(X|X') = v_n \left[ h(X|X') - \log \sqrt{2\pi e \sigma_n^2} \right] \quad (4.25)$$

где  $v_n$  — число отсчетов в единицу времени.

При непрерывном времени

$$H'_\epsilon(X|X') = 2 F_c \left[ h(X|X') - \log \sqrt{2\pi e \sigma_n^2} \right] \quad (4.26)$$

Избыточность непрерывного стационарного источника

$$\kappa_n = 1 - H_\epsilon(X|X')/H_\epsilon(X)_{\max} \quad (4.27)$$

### Задачи

4.3.1. Вычислить количество информации, содержащееся в одном отсчете непрерывного сообщения, создаваемого стационарным источником без памяти при абсолютно точном его воспроизведении.

4.3.2. Найти дифференциальную энтропию гауссовского случайного процесса с дисперсией  $\sigma^2$ .

4.3.3. Показать, что условная дифференциальная энтропия стационарного гауссовского случайного процесса  $h(X|X_{пр})$ , отсчет которого зависит только от одного предшествующего отсчета (модель марковского процесса с дискретным временем), определяется формулой

$$h(X|X_{пр}) = \log \sqrt{2\pi e \sigma^2 (1 - R^2)},$$

где  $R$  — нормированная корреляционная функция случайного процесса.

4.3.4. Гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$  проходит через линейный усилитель с коэффициентом усиления  $K$ . Определить приращение дифференциальной энтропии выходного сигнала по сравнению с входным по данным, приведенным в табл. 4.10.

Таблица 4.10

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma^2$ , мВт	10	2	4	3	1	4	2	1	9	3
$K$	200	500	100	90	70	70	300	80	200	300

4.3.5. Сравнить дифференциальные энтропии гауссовского процесса  $x$  и процесса, равномерно распределенного на интервале  $(-a, a)$ , если их дисперсии одинаковы.

4.3.6. По каналу связи передается сигнал  $X(t)$ , представляющий собой гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_x^2$ . В канале действует независимый от сигнала гауссовский шум  $N(t)$  с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_n^2$ . Найти дифференциальную энтропию входного и выходного сигналов, а также условные дифференциальные энтропии  $h(X|Y)$  и  $h(Y|X)$  по данным, приведенным в табл. 4.11.

Таблица 4.11

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma_x^2$ , мВт	4	9	8	7	2	7	20	8	6	6
$\sigma_n^2$ , мВт	1	5	5	2	1	3	4	6	3	1

4.3.7. Определить энтропию непрерывного источника при фиксированной дисперсии шума воспроизведения.

4.3.8. Найти максимально возможное значение энтропии при заданной средней мощности сигнала  $P_c$  и средней мощности шума воспроизведения (канала)  $P_{ш}$ .

4.3.9. Показать, что при фиксированных средних мощностях сигнала  $P_c$  и шума  $P_{ш}$  максимально возможная энтропия источника определяется соотношением  $H'(X)_{\max} = v_n \log \sqrt{\rho}$  при дискретном времени и  $H'_e(X)_{\max} = F_c \log \rho$  при непрерывном времени.

4.3.10. Непрерывный сигнал непрерывного времени  $X(t)$  на выходе источника имеет равномерное распределение с дисперсией  $\sigma_x^2$ . Найти энтропию источника, если полоса сигнала  $F_c$ , а дисперсия шума воспроизведения  $\sigma_n^2$ . На сколько изменится энтропия источника, если он начнет выдавать сигнал с теми же параметрами, но с гауссовским распределением? Числовые данные приведены в табл. 4.12.

Таблица 4.12

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma_x^2$ , мВт	3	50	100	70	90	90	20	100	40	10
$\sigma_n^2$ , мВт	0,5	0,7	1	0,4	0,4	0,9	0,4	0,8	0,7	0,5
$F_c \cdot 10^{-2}$ , Гц	3,1	50	64	120	40	90	100	90	10	50

4.3.11. Найти избыточность источника, выдающего непрерывное сообщение с равномерным распределением и независимыми отсчетами, при мощности сигнала  $P_c$  и отношении сигнал-шум в канале  $\rho$ .

4.3.12. Решить задачу 4.3.11 для числовых данных, приведенных в табл. 4.13.

Таблица 4.13

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_c$ , мВт	10	60	90	40	40	80	90	30	50
$\rho$	10	90	40	10	80	90	30	50	30

4.3.13. Определить избыточность непрерывного гауссовского источника с памятью при отношении сигнал-шум воспроизведения, равном 10, и значениях нормированной корреляционной функции случайного процесса, приведенных в табл. 4.14.

Таблица 4.14

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R$	0,005	0,0075	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6

#### 4.4. КОЛИЧЕСТВО И СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ПО НЕПРЕРЫВНОМУ КАНАЛУ. ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ НЕПРЕРЫВНОГО КАНАЛА

Если на вход непрерывного канала поступил сигнал  $U(t)$ , а в канале действует аддитивная помеха  $N(t)$  так, что принимаемое колебание  $Z(t) = U(t) + N(t)$ , то условная дифференциальная энтропия помехи  $h(Z|U) = h(N)$ . Поэтому

$$I(U, Z) = h(Z) - h(N) \quad (4.28)$$

Скорость передачи информации по непрерывному каналу с дискретным временем

$$I'(U, Z) = v [h(Z) - h(N)], \quad (4.29)$$

где  $v_k = 2F_k$  — число отсчетов сигнала, передаваемое в одну секунду по каналу с полосой  $F_k$

Пропускной способностью  $C$  непрерывного канала с заданным шумом и  $v_k$  будем называть предельное значение скорости передачи информации (4.29), достигаемое при вариации всевозможных источников на входе

При аддитивном шуме в канале

$$C = v_k \max [h(Z) - h(N)] \quad (4.30)$$

Применительно к непрерывному источнику основную теорему оптимального кодирования К Шеннона можно сформулировать так: если энтальпия источника меньше пропускной способности канала  $H'_\epsilon(A) < C$ , то существует способ кодирования и декодирования, при котором с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, средняя мощность шума воспроизведения меньше заданной величины  $P_{ш}$ . Если  $H'_\epsilon(A) > C$ , такого способа нет.

Максимальный объем информации, который может быть передан по непрерывному каналу с пропускной способностью  $C$ ,

$$V_{чк} = T_k C, \quad (4.31)$$

где  $T_k$  — время использования канала

#### Задачи

4.4.1. По каналу связи передается сигнал  $S(t)$ , представляющий собой гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, дисперсией  $\sigma^2 = 8$  мВт, равномерным энергетическим спектром  $N_0$  в полосе частот канала  $F = 3100$  Гц. В канале действует независимая от сигнала флуктуационная помеха типа белый шум с энергетическим спектром  $N_0 = 3,22 \cdot 10^{-7}$  Вт/Гц, гауссовским распределением и нулевым математическим ожиданием. Определить среднее на один отсчет сигнала количество информации, переданное по каналу.

4.4.2. Решить задачу 4.4.1 для вариантов числовых значений величин, приведенных в табл. 4.15.

4.4.3. С какой скоростью передается информация по каналу, если на его вход поступает  $v_k = 100$  независимых отсчетов сигнала

Таблица 4.15

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma^2$ , мВт	8	10	4	5	8	9	2	10	7	6
$N_0$ , мкВт/Гц	0,3	0,7	0,2	0,2	0,2	0,7	0,8	1	0,7	0,5
$F$ , кГц	7	2	8	7	5	3	9	4	9	6

в секунду. Сигнал  $S(t)$  распределен по гауссовскому закону,  $m_s = 0$  и  $\sigma_s^2 = 2,8$  Вт. В канале действует аддитивный гауссовский шум с  $m_n = 0$  и  $\sigma_n^2 = 0,4$  Вт.

4.4.4. Решить задачу 4.4.3 для вариантов числовых значений величин, приведенных в табл. 4.16.

Таблица 4.16

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v_k$	200	900	400	800	1000	900	100	500	300	900
$\sigma_s^2$ , Вт	4,6	3,1	1,1	2,9	1,8	5,8	2,0	3,0	1,3	3,3
$\sigma_n^2$ , Вт	0,3	0,6	0,1	0,2	0,3	0,5	0,2	0,5	1	0,6

4.4.5. Показать, что при заданном ансамбле входных сигналов и фиксированной дисперсии помехи скорость передачи информации по непрерывному каналу будет иметь наименьшее значение при гауссовском шуме в канале.

4.4.6. Найти пропускную способность гауссовского канала непрерывного времени, если  $F$  — полоса канала;  $P_c$  и  $P_{ш}$  — фиксированные средние мощности сигнала и шума в канале, которые считаются независимыми.

4.4.7. Найти пропускную способность гауссовского канала, имеющего полосу  $F = 3,1$  кГц, если на вход канала поступает сигнал, мощность которого  $P_c = 1$  мВт, а в канале действует белый шум со спектральной плотностью мощности  $N_0 = 10^{-7}$  Вт/Гц.

4.4.8. Решить задачу 4.4.7 для вариантов числовых значений величин, заданных в табл. 4.17.

Таблица 4.17

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F$ , кГц	1	10	3	7	5	9	7	2	10	4
$P_c$ , мВт	7	7	2	8	5	3	5	1	7	9
$N_0$ , мкВт/Гц	0,4	0,5	0,2	0,3	0,6	1	0,9	0,1	0,2	0,9

4.4.9. Определить максимально возможную величину пропускной способности гауссовского канала при неограниченной полосе.

4.4.10. Найти минимальную энергию сигнала, необходимую для передачи одной единицы информации по каналу с шумами.

4.4.11. По гауссовскому каналу связи с полосой  $f_0 \pm 0,5F$  передается сигнал  $s(t)$ , имеющий спектральную плотность мощности  $G_0(f) = A \exp[-\beta^2(f-f_0)^2]$  ( $\beta = 1,83 \cdot 10^{-3}$  с,  $A = 48 \cdot 10^{-9}$  Вт/Гц,  $F = 3,1 \cdot 10^3$  Гц). В канале действует белый шум со спектральной плотностью мощности  $N_0 = 10^{-9}$  Вт/Гц.

Определить максимально возможный объем информации, который может быть передан по данному каналу, если время использования канала  $T_k = 1$  ч.

4.4.12. Решить задачу 4.4.11 для вариантов числовых значений величин, приведенных в табл. 4.18.

Таблица 4.18

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\beta$ , с <sup>-1</sup>	4	5	2	3	6	10	9	1	2	9
$A$ , Вт/Гц	4	9	4	8	7	5	2	8	10	2
$F$ , кГц	40	50	20	20	60	100	90	10	20	90
$N_0$ , Вт/Гц	$10^{-10}$	$10^{-15}$	$10^{-19}$	$10^{-13}$	$10^{-19}$	$10^{-17}$	$10^{-16}$	$10^{-15}$	$10^{-12}$	$10^{-18}$

4.4.13. Решить задачу 4.4.11, если передаваемый сигнал имеет спектральную плотность мощности  $G_0(f) = A \exp[-\alpha|f-f_0|]$  по числовым данным, приведенным в табл. 4.19.

Таблица 4.19

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A$ , Вт/Гц	1	10	9	9	8	3	7	6	5	1
$\alpha$ , с <sup>-1</sup>	1	2	1	3	8	3	5	1	4	6
$F$ , кГц	7	7	2	8	5	3	5	1	7	9
$N_0 \cdot 10^{-9}$ , Вт/Гц	1	2	1	3	8	3	5	1	4	6

4.4.14. Чему равна пропускная способность канала, если средняя мощность сигнала 1 мкВт, а помехой является тепловой шум приемного устройства с полосой 10 кГц. Приемник работает при температуре 20 °С.

Таблица 4.20

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_c$ , мкВт	6	7	1	5	8	6	10	9	7	9
$F$ , кГц	10	4	4	10	3	8	6	10	5	6
$t$ , град	24	30	18	27	25	22	28	30	20	20

4.4.15. Решить задачу 4.4.14 для вариантов числовых значений величин, заданных в табл. 4.20.

4.4.16. Определить величину отношения сигнал-шум в канале, при котором по каналу можно передавать символы со скоростью  $v_n = 2F$ , если осуществляется оптимальное кодирование по Шеннону.

## Глава 5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО КОДИРОВАНИЯ

### 5.1. ПРИНЦИПЫ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО КОДИРОВАНИЯ

Корректирующими или избыточными кодами (см § 1.2) называют коды, которые позволяют обнаруживать ошибки и исправлять ошибки и стирания, возникающие при передаче дискретных сообщений. Для корректирующих кодов число комбинаций  $N$  удовлетворяет неравенству

$$N = m^n > K \quad (5.1)$$

(в дальнейшем будем рассматривать только двоичные коды, для которых  $m=2$ ). При этом часть кодовых комбинаций используется для кодирования (эти кодовые комбинации называются разрешенными, их число  $N_p = K$ ), а другая часть при кодировании не используется. Число неиспользованных при кодировании комбинаций, называемых запрещенными, равно  $N - N_p$  или  $N - K$ .

В  $n$ -разрядной кодовой комбинации корректирующего кода  $k = \log K$  символов являются информационными,  $r = n - k$  символов — проверочными (избыточными). Легко заметить, что число разрешенных кодовых комбинаций

$$N_p = 2^k. \quad (5.2)$$

Избыточностью равномерного блочного кода является величина

$$\kappa_k = 1 - (\log K) / (n \log m), \quad (5.3)$$

а относительной скоростью кода

$$R_k = (\log K) / (n \log m) = 1 - \kappa_k. \quad (5.4)$$

При избыточном кодировании ошибки обнаруживаются, если переданная разрешенная комбинация превращается в одну из запрещенных. Для декодирования с обнаружением ошибок множество принимаемых кодовых комбинаций разбивается на  $K+1$  подмножества, из которых подмножества  $B_1, B_2, \dots, B_K$  содержат каждое по одной (разрешенной) кодовой комбинации, а подмножество  $B_{K+1}$  — все остальные (запрещенные) комбинации.

При декодировании с исправлением ошибок множество  $B$  разбивается на  $K$  неперекрывающихся подмножеств:  $B_1, B_2, \dots, B_K$ . Если принята кодовая комбинация, принадлежащая подмножеству  $B_i$ , то считается, что передавалась кодовая комбинация  $b_i$ . В подмножество  $B_i$  следует включить те запрещенные

комбинации, которые наиболее вероятно могут образоваться из переданной разрешенной комбинации  $\mathbf{b}$ ,

Если минимальное расстояние по Хеммингу (см § 2.4) между разрешенными кодовыми комбинациями  $d_{\min}$ , то код позволяет обнаружить ошибку, когда в кодовой комбинации число ошибочно принятых символов удовлетворяет условию

$$q < d_{\min} \quad (5.5)$$

Следовательно, максимальная кратность обнаруживаемых ошибок  $q_0 = d_{\min} - 1$ . Блочный корректирующий код исправляет ошибки, если их число

$$q < d_{\min}/2 \quad (5.6)$$

Максимальная кратность полностью исправляемых ошибок

$$q_n = \begin{cases} (d_{\min} - 1)/2 & \text{при нечетном } d_{\min}, \\ d_{\min}/2 - 1 & \text{при четном } d_{\min} \end{cases}$$

При декодировании с исправлением ошибок и стираний могут быть исправлены  $q \leq q_n$  ошибок и  $q \leq q_c$  стираний, если их число удовлетворяет условию

$$q_n < (d_{\min} - q_c) / 2$$

В общем случае код с расстоянием  $d_{\min}$  исправляет произвольное число  $q \leq q_c$  стираний,  $q \leq q_n$  ошибок и обнаруживает  $q_n \leq q \leq q_0$  ошибок при условии, что  $2q_n + q_0 + q_c < d_{\min}$

## Задачи

5.1.1. Сообщения источника, имеющего алфавит с объемом  $K = 32$ , кодируются двоичным блочным кодом. Число разрядов в каждой кодовой комбинации  $n = 8$ . Какое число информационных и проверочных символов содержится в каждой кодовой комбинации? Сколько разрешенных и запрещенных комбинаций в используемом коде?

5.1.2. По условию задачи 5.1.1 определить избыточность и относительную скорость кода

5.1.3. Первичный непрерывный сигнал путем дискретизации во времени и квантования по уровню превращается в импульсную последовательность с числом уровней  $K = 128$ . Каждый уровень квантованного сигнала кодируется равномерным 10-разрядным двоичным кодом\*. Чему равна избыточность и относительная скорость кода? Как изменяется избыточность и относительная скорость кода, если число разрядов в кодовой комбинации уменьшить на 2? Увеличить на 2?

5.1.4. Алфавит с объемом  $K = 256$  кодируется 15-разрядным равномерным двоичным кодом. Чему равна избыточность и относительная скорость кода?

5.1.5. Комбинации  $n$ -разрядного двоичного блочного кода со-

держат  $k$  информационных символов. Определите долю обнаруживаемых таким кодом ошибок из всех возможных ошибок.

5.1.6. Для кода из предыдущей задачи определите долю исправляемых ошибок. При каком условии код может применяться в качестве исправляющего?

5.1.7. Определить избыточность и относительную скорость для кодов по следующим данным.

1)  $m = 2, n = 7, K = 32$ ; 2)  $m = 2, n = 6, K = 16$ ;

3)  $m = 3, n = 4, K = 27$ ; 4)  $m = 3, n = 5, K = 81$ .

5.1.8. Определить долю обнаруживаемых и исправляемых ошибок для двоичных кодов по следующим данным:

1)  $n = 5, k = 4$ ; 2)  $n = 7, k = 4$ ; 3)  $n = 15, k = 11$ ; 4)  $n = 21, k = 10$

5.1.9. Определить долю обнаруживаемых ошибок для кода, каждая комбинация которого содержит всего один избыточный символ ( $n = k + 1$ )

5.1.10. Определить минимальное кодовое расстояние, необходимое для обнаружения тройной ошибки

5.1.11. Ошибки какой кратности может исправить код, для которого  $d_{\min} = 7$ ?

5.1.12. Определить  $d_{\min}$  для кодов:

а) обнаруживающего тройную и исправляющего двойную ошибки,

б) обнаруживающего пятикратную и исправляющего тройную ошибки

5.1.13. Показать, что код с расстоянием  $d_{\min}$  позволяет обнаружить  $q_0 \leq d_{\min} - 1$  ошибок и исправить  $q_n \leq d_{\min}/2 - 1$  ошибок.

5.1.14. Каждые 100 символов двоичного источника кодируются двоичной последовательностью, содержащей  $n = 125$  кодовых символов. Определить избыточность кода  $\eta_k$ . Найти вероятность правильного декодирования кодовой комбинации в канале с независимыми ошибками, если  $d_{\min} = 6$ , вероятность ошибочной регистрации кодового символа  $p_0 = 0,05$ , а декодирование осуществляется по минимуму расстояния по Хеммингу.

5.1.15. Символы двоичного источника  $A$  и  $B$  кодируются избыточным 3-разрядным двоичным кодом с  $d_{\min} = 3$ . Составить таблицу возможных состояний на выходе декодера при декодировании по минимуму расстояния по Хеммингу в нестертых символах:

с исправлением стираний и обнаружением ошибок;

с исправлением ошибок и стираний,

с обнаружением ошибок и исправлением ошибок и стираний

## 5.2. ЛИНЕЙНЫЕ ДВОИЧНЫЕ БЛОЧНЫЕ КОДЫ

Линейный двоичный код длины  $n$  — это код, для которого сумма по модулю 2 любых разрешенных кодовых комбинаций также является разрешенной кодовой комбинацией

Если формирование кодовой комбинации осуществляется в два этапа, при чем на первом этапе образуются кодовые комбинации примитивного кода, а

\* Такой способ кодирования непрерывных сигналов называется импульсно-кодовой модуляцией (ИКМ). Более подробно ИКМ будет рассмотрена в гл. 8

затем по определенному правилу к ним добавляются избыточные (контрольные, проверочные) символы, то код называется систематическим. Проверочные символы  $b_{пр}$  формируются по правилу

$$b_{i, пр} = \sum_{l=1}^k \gamma_{l,i} b_l, \quad (5.7)$$

где  $i = \overline{k+1, k+r}$ ;  $k$  — число информационных символов;  $r$  — число избыточных символов. Суммирование в (5.7) осуществляется по модулю 2 для двоичного кода\*.

Коэффициент  $\gamma_{l,i}$  равен 1, если информационный символ  $b_l$  участвует в образовании проверочного символа  $b_{i, пр}$ . В противном случае  $\gamma_{l,i} = 0$ . Совокупность коэффициентов  $\gamma_{l,i}$  удобно задать в виде матрицы размерности  $r \times k$  ( $r$  — строк,  $k$  — столбцов)

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{1, k+1} & \gamma_{2, k+1} & \gamma_{3, k+1} & \dots & \gamma_{k, k+1} \\ \gamma_{1, k+2} & \gamma_{2, k+2} & \gamma_{3, k+2} & \dots & \gamma_{k, k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{1, k+r} & \gamma_{2, k+r} & \gamma_{3, k+r} & \dots & \gamma_{k, k+r} \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Проверочные символы в этом случае задаются соотношением

$$b_{пр} = b\gamma^T = |b_1 b_2 \dots b_k| \begin{pmatrix} \gamma_{1, k+1} & \dots & \gamma_{1, k+r} \\ \gamma_{2, k+1} & \dots & \gamma_{2, k+r} \\ \gamma_{k, k+1} & \dots & \gamma_{k, k+r} \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Здесь  $b$  — матрица-строка заданной кодовой комбинации;  $\gamma^T$  — транспонированная матрица коэффициентов  $\gamma_{l,i}$ . Линейный код можно получить линейным суммированием по модулю 2 любых  $k$  линейно независимых кодовых комбинаций. Матрица, состоящая из  $k$  строк, образованных этими комбинациями, называется порождающей или производящей и имеет размерность  $k \times n$ . В общем случае порождающая матрица  $G$  записывается так:

$$G = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & b_{1, k+1} & b_{1, k+2} & \dots & b_{1, k+r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} & b_{2, k+1} & b_{2, k+2} & \dots & b_{2, k+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k, 1} & b_{k, 2} & \dots & b_{kk} & b_{k, k+1} & b_{k, k+2} & \dots & b_{k, k+r} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Здесь  $b_{i,j}$  —  $j$ -й информационный символ  $i$ -й кодовой комбинации при  $j \leq k$ , или  $j$ -й проверочный символ  $i$ -й кодовой комбинации при  $j \geq k+1$ .

В качестве линейно независимых удобно использовать кодовые комбинации, содержащие лишь один ненулевой символ. В этом случае порождающая матрица  $G$  с учетом (5.9) принимает вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_{1, k+1} & \gamma_{1, k+2} & \dots & \gamma_{1, k+r} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_{2, k+1} & \gamma_{2, k+2} & \dots & \gamma_{2, k+r} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \gamma_{3, k+1} & \gamma_{3, k+2} & \dots & \gamma_{3, k+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \gamma_{k, k+1} & \gamma_{k, k+2} & \dots & \gamma_{k, k+r} \end{pmatrix} = |I_k \gamma|, \quad (5.11)$$

\* Коды, у которых проверочные символы формируются суммированием по модулю 2, называются кодами с проверкой на четность

где  $I_k$  — единичная матрица порядка  $k$ ;  $\gamma$  — матрица коэффициентов  $\gamma_{l,i}$ . Множество кодовых комбинаций кода, заданного порождающей матрицей (5.11), является также множеством линейных комбинаций строк этой матрицы. Линейный код длины  $n$  с  $k$  информационными символами и с  $r = n - k$  проверочными символами обозначается  $(n, k)$ . Кодовую комбинацию такого кода можно записать как

$$b = \underbrace{b_1 b_2 \dots b_{k-2} b_{k-1} b_k}_k \underbrace{b_{k+1, пр} b_{k+2, пр} \dots b_{n, пр}}_{r=n-k}$$

где  $\{b_i\}$  — информационные символы;  $\{b_{i, пр}\}$  — проверочные символы.

Линейный  $(n, k)$ -код можно задать проверочной матрицей  $H$ , имеющей размерность  $r \times n$ . Эта матрица имеет следующий вид:

$$H = \begin{pmatrix} \gamma_{1, k+1} & \gamma_{2, k+1} & \dots & \gamma_{k, k+1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_{1, k+2} & \gamma_{2, k+2} & \dots & \gamma_{k, k+2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{1, k+r} & \gamma_{2, k+r} & \dots & \gamma_{k, k+r} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \|\gamma I_r\|. \quad (5.12)$$

В каждой строке проверочной матрицы на позициях информационных символов стоят коэффициенты  $\gamma_{l,i}$ , а на позициях проверочных символов — единицы и нули, причем единица указывает, какой именно проверочный символ соответствует совокупности коэффициентов данной строки.

Для каждой кодовой комбинации  $(n, k)$ -кода матричное произведение

$$bH^T = 0. \quad (5.13)$$

Таким образом, совокупность кодовых комбинаций  $(n, k)$ -кода — это множество всех последовательностей  $b$ , для которых выполняется условие (5.13). Это соотношение лежит в основе процедуры декодирования линейных кодов. Проверочная матрица  $(n, k)$ -кода является порождающей матрицей нового линейного  $(n, n-k)$ -кода, содержащего  $2^{n-k}$  комбинаций, т. е.  $H_{(n,k)} = G_{(n, n-k)}$ . Такой  $(n, n-k)$ -код называется двойственным для исходного  $(n, k)$ -кода.

Из (5.13) следует, что

$$G_{(n,k)} H_{(n,k)}^T = G_{(n,k)} G_{(n, n-k)}^T = 0 \quad (5.14)$$

Это условие означает, что двойственные коды  $(n, k)$  и  $(n, n-k)$  являются ортогональными.

Избыточность линейного двоичного кода

$$\kappa_k = 1 - (\log 2^k)/n = 1 - k/n = r/n, \quad (5.15)$$

где  $r = n - k$  — число проверочных символов

«Оптимальным» является код  $(n, k)$ , обеспечивающий наименьшую вероятность ошибочного декодирования среди всех кодов той же длины  $n$  и избыточности  $r/n$ .

Совершенные коды — это коды, которые свою избыточность расходуют на исправление ошибок заданной кратности  $q$ . Квазисовершенным называется код, который, кроме того, исправляет некоторую часть ошибок кратности  $q+1$ .

Обнаружение ошибок при использовании линейных кодов основано на проверке соотношений (5.7): по принятой кодовой комбинации составляются контрольные суммы по модулю 2

$$b_{i, \text{пр}}^{\text{конт}} = \sum_{l=1}^k \gamma_{l, i} \hat{b}_l, \quad i = \overline{k+1, k+r} \quad (5.16)$$

(здесь  $b_l$  —  $l$ -й знак принятой кодовой комбинации  $\hat{\mathbf{b}}$ ) и сопоставляется с проверочными символами принятой кодовой комбинации. Совокупность чисел  $c_{1-k} = \hat{b}_{j, \text{пр}} \oplus b_{j, \text{конт}}$  для данной кодовой комбинации называется синдромом

$$\mathbf{c}(\hat{\mathbf{b}}) = c_1 c_2 \dots c_r$$

Декодирование принятой кодовой комбинации может быть осуществлено с помощью проверочной матрицы  $\mathbf{H}$ . Если принята комбинация  $\hat{\mathbf{b}}$ , то синдром  $\mathbf{c}$  можно определить равенством  $\mathbf{c} = \mathbf{b}\mathbf{H}^T$ . Таким образом, синдром — это вектор-строка  $(c_1, c_2, \dots, c_r)$  с  $r$  компонентами (по одной для каждого проверочного символа). Если  $\mathbf{b}$  — переданная кодовая комбинация, а  $\hat{\mathbf{b}}$  — принятая, то сумма их по модулю 2  $\mathbf{b} \oplus \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{Z}$  называется шумовой последовательностью. При этом  $\mathbf{c} = \mathbf{Z}\mathbf{H}^T$ .

При правильном приеме все элементы синдрома равны нулю. Отличие хотя бы одного элемента синдрома от нуля означает, что произошла ошибка.

При декодировании с исправлением ошибок по виду синдрома можно определить разряд кодовой комбинации, в котором произошла ошибка.

### Задачи

5.2.1. Двоичный код, предназначенный для кодирования восьми сообщений, содержит кодовые комбинации:

$$\mathbf{b}_1 = 00000; \mathbf{b}_2 = 10011; \mathbf{b}_3 = 01010; \mathbf{b}_4 = 11001;$$

$$\mathbf{b}_5 = 00101; \mathbf{b}_6 = 10110; \mathbf{b}_7 = 01111; \mathbf{b}_8 = 11100.$$

Является ли данный код линейным? Найти избыточность кода и  $d_{\text{мин}}$ .

5.2.2. Построить систематический код (7, 4), предназначенный для кодирования сообщений двоичного источника, имеющего объем  $K = 2^4$  символов. Показать, что  $d_{\text{мин}}$  такого кода равно 3.

5.2.3. Для систематического кода (7, 4) из предыдущей задачи построить производящую и проверочную матрицы.

5.2.4. Построить линейный код (7, 4) по заданной производящей матрице

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

По производящей матрице составить правило формирования проверочных разрядов. Составить проверочную матрицу.

5.2.5. Линейный код (7, 4) построен по матрице

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Составить проверочную матрицу и показать процесс исправления ошибок в произвольном разряде корректирующего кода, информационная часть которого представляет собой 4-разрядные комбинации примитивного двоичного кода.

5.2.6. Для кода, заданного в задаче 5.2.4, составить таблицу синдромов и показать, каким ошибочным разрядам они соответствуют.

5.2.7. Составить таблицу синдромов одиночных ошибок для кода (7, 4) из задачи 5.2.5 и показать, каким ошибочным разрядам они соответствуют.

5.2.8. Убедиться в том, что в кодовых комбинациях 1000111, 0111010, 1101001, 0000000, принадлежащих коду из задачи 5.2.4, может быть исправлена ошибка в любом информационном разряде.

5.2.9. Показать, что код, заданный производящей матрицей

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

исправляет одиночные ошибки в произвольной кодовой комбинации.

5.2.10. Сравнить с точки зрения способности исправления одиночных ошибок линейные коды, заданные производящими матрицами

$$\mathbf{G}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{G}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Выяснить, какой из кодов реализуется более простыми средствами.

5.2.11. Решить задачу 5.2.10 для кодов, заданных производящими матрицами

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2.12. Определить, какие из приведенных кодовых комбинаций линейного кода содержат ошибку:

1100111, 0110101, 0011010, 0010110,

1000100, 1011011, 0010101, 0110010,

1100100, 0110101, 1001010, 0011011.

Код построен по матрице

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.2.13. Для кода (7, 4) из задачи 5.2.2 построить комбинации двойственного кода (7, 3).

5.2.14. Найти комбинации кода (7, 3), двойственного коду (7, 4), из задачи 5.2.4.

5.2.15. Найти комбинации кода (7, 3), двойственного коду (7, 4), заданного производящей матрицей в задаче 5.2.5.

5.2.16. В табл. 5.1 приведены 2-разрядные двоичные информационные последовательности и соответствующие им кодовые комбинации.

Показать, что полученный код является систематическим кодом с проверкой на четность, и выразить каждый разряд кодовой комбинации в виде линейной комбинации информационных символов. Найти для заданного кода порождающую и проверочную матрицы. Найти вероятность неправильного декодирования.

Таблица 5.1

Информационная последовательность	Кодовая комбинация
00	00000
10	10111
01	01101
11	11010

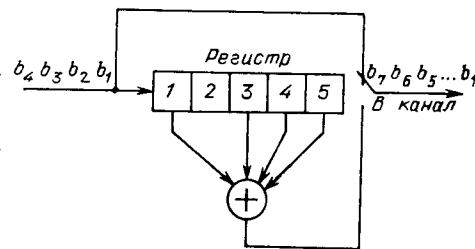


Рис. 5.1. Схема формирования двоичного кода

5.2.17. На рис. 5.1 показана схема формирования двоичного кода при передаче по двоичному симметричному каналу с вероятностью ошибочного перехода  $p_0 < 0,5$ . Первоначально сдвиговый регистр заполнен нулями; затем в регистр поступают четыре информационных символа и одновременно передаются по каналу. После этого передаются три проверочных символа. Перед вычислением проверочного символа все четыре информационных символа сдвигаются в регистре на одну позицию вправо.

Найти проверочную матрицу, порождающую матрицу, таблицу декодирования и вероятность ошибочного декодирования для данного кода.

### 5.3. ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Линейный двоичный код, которому принадлежат кодовые комбинации, полученные путем циклической перестановки символов, называется циклическим.

Кодовый вектор  $\mathbf{b}$  циклического кода представим полиномом  $(n-1)$  степени:  $b(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ , где коэффициенты  $a_i$  принимают значения 0 или 1. При таком представлении кодовый вектор, полученный из  $\mathbf{b}$  циклической перестановкой элементов, можно рассматривать как результат умножения полинома  $b(x)$  на  $x$ , если считать, что  $x^n = 1$ .

Полином наименьшей степени среди всех полиномов, соответствующих кодовым комбинациям циклического кода, называется порождающим полиномом  $g(x) = 1 + \gamma_1x + \gamma_2x^2 + \dots + \gamma_r x^r$ . Коэффициенты  $\gamma_i$  равны 0 или 1. Степень порождающего полинома определяет число проверочных символов в кодовой комбинации. Число ненулевых членов полинома  $g(x)$  определяет предельное для данного кода  $d_{\text{мин}}$ .

Зная порождающий полином, можно построить все кодовые комбинации циклического кода, а также устройства кодирования и декодирования. На порождающий полином должен делиться без остатка двучлен  $x^n \pm 1$ . Полученный результат определяет проверочный полином

$$h(x) = (x^n - 1) / g(x). \quad (5.17)$$

Порождающий полином  $g(x)$  и проверочный полином  $h(x)$  являются ортогональными, так как при  $x^n - 1 = 0$  они удовлетворяют условию

$$g(x)h(x) = 0. \quad (5.18)$$

При отсутствии ошибок в кодовой комбинации циклического кода должно выполняться условие

$$\mathbf{b}(x)h(x) = 0. \quad (5.19)$$

Невыполнение условия (5.19), т. е.  $\mathbf{b}(x)h(x) \neq 0$ , является признаком ошибки.

#### Задачи

5.3.1. Записать кодовые комбинации циклического кода, полученные циклическим сдвигом комбинации 110101.



5.3.2. Первые три комбинации циклического кода имеют вид 100001101, 110000110, 011000011. Построить остальные комбинации этого кода.

5.3.3. Представить в виде многочленов заданные комбинации некоторого циклического кода: 0111110, 0011111, 1001111.

5.3.4. Показать, что полином  $g(x) = 1 + x + x^3$  является порождающим для циклического кода (7, 4). Составить кодовые комбинации циклического кода (7, 4).

5.3.5. Составить структурные схемы кодера и декодера для циклического кода (7, 4), заданного порождающим полиномом  $g(x) = 1 + x + x^3$ . Пояснить процесс кодирования и декодирования с исправлением ошибок.

5.3.6. Показать, что полином  $g(x) = 1 + x^2 + x^3$  является порождающим для 7-разрядного циклического кода. Найти число информационных и проверочных разрядов и  $d_{\min}$ . Определить проверочный полином.

5.3.7. Показать, что полином  $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3$  является порождающим для 8-разрядного циклического кода. Найти число информационных и проверочных разрядов,  $d_{\min}$  и определить проверочный полином.

5.3.8. Какие комбинации циклического кода (7, 4), заданного полиномом  $g(x) = 1 + x + x^2$ , содержат ошибку: 1001000, 1111001, 0100101, 1111011, 0010111, 0011111, 0100011, 1000001, 1100110, 1111100.

5.3.9. Какие комбинации циклического кода (7, 4), заданного полиномом  $g(x) = 1 + x^2 + x^3$ , содержат ошибку: 0001101, 0011110, 1001101, 1000110, 1100110, 0100011, 0110011, 1000011, 1010101, 1101000, 1101100, 0110100, 0110110.

5.3.10. Можно ли использовать полином  $g(x) = 1 + x^2 + x^5$  в качестве порождающего для построения циклического кода с кодовым расстоянием  $d_{\min} = 5$ ?

5.3.11. Какое максимальное число ошибок может исправить циклический код, построенный с помощью порождающего полинома  $g(x) = 1 + x + x^4$ ?

5.3.12. Какое максимальное число ошибок могут исправить циклические коды, построенные с помощью порождающих полиномов: 1)  $g(x) = 1 + x^2 + x^4$ ; 2)  $g(x) = 1 + x^2 + x^5$ ; 3)  $g(x) = 1 + x + x^3 + x^6$ .

## 5.4. НЕКОТОРЫЕ РАЗНОВИДНОСТИ КОРРЕКТИРУЮЩИХ КОДОВ

*Итеративный код* Строится из двух линейных систематических кодов  $(n_1, k_1)$  и  $(n_2, k_2)$ . Вначале сообщение кодируется кодом 1-й степени  $(n_1, k_1)$ . Если  $k_2$  комбинаций кода 1-й степени записать в виде строк матрицы, то ее столбцы содержат по  $k_2$  символов, которые являются информационными для кода 2-й степени  $(n_2, k_2)$ . К столбцам этой матрицы необходимо добавить  $n_2 - k_2$  про-

верочных символов. В результате получится матрица  $(n_1 \times n_2)$ , содержащая  $n_1 n_2$  символов,  $k_1 k_2$  из которых являются информационными:

	Информационные символы 1-й степени	Проверочные символы 1-й степени
Информационные символы 2-й степени	$\begin{pmatrix} a_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,k_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k_2,1} & b_{k_2,2} & \dots & b_{k_2,k_1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b_{1,k_1+1} & \dots & b_{1,n_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k_2,k_1+1} & \dots & b_{k_2,n_1} \end{pmatrix}$
Проверочные символы 2-й степени	$\begin{pmatrix} b_{k_2+1,1} & \dots & b_{k_2+1,k_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n_2,1} & \dots & b_{n_2,k_1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b_{k_2+1,k_1+1} & \dots & b_{k_2+1,n_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n_2,k_1+1} & \dots & b_{n_2,n_1} \end{pmatrix}$

(5.20)

Минимальное кодовое расстояние двумерного итеративного кода

$$d_{\min} = d_1 d_2, \quad (5.21)$$

где  $d_1, d_2$  — минимальные кодовые расстояния кодов 1-й и 2-й степени соответственно

*Код с постоянным весом* — блочный код, каждая кодовая комбинация которого содержит одинаковое число единиц (одинаковый вес). Эти коды обозначаются  $(k/l)$ . Это означает, что комбинации  $n$ -разрядного кода с постоянным весом содержат  $k$  единиц и  $l$  нулей ( $k+l=n$ ).

*Код с четным числом единиц* — код, который образуется добавлением к комбинации  $n$ -разрядного кода одного знака, чтобы число всех единиц в новом  $(n+1)$ -разрядном коде было четным

*Код с числом единиц, кратным 3* — код, к каждой комбинации которого добавляют два проверочных элемента, чтобы сумма всех элементов по модулю 3 была равной 0

Повышение эффективности кода с обнаружением ошибок может быть достигнуто введением определенных зависимостей между элементами кодовых комбинаций. Примером такого кода является *корреляционный*, в котором элемент первичного кода преобразуется в два элемента: 1 преобразуется в 10, 2 — в 01

В технике связи часто применяется *инверсный код* (код с повторением), в основу построения которого положен метод повторения исходной кодовой комбинации: при четном числе единиц кодовая комбинация просто повторяется, при нечетном — повторяется в инвертированном виде

Помимо блочных кодов, в настоящее время распространены *рекуррентные* или *цепные коды*. В рекуррентном коде информационные символы чередуются с проверочными, образуя последовательность

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots$$

где  $b_i$  —  $i$ -й информационный символ, являющийся 0 или 1 в соответствии с передаваемым сообщением, а  $b_{i+1}$  — проверочный символ, определяемый уравнением

$$b_{i+1} = b_i - b_{i-1}, \quad (5.22)$$

причем суммирование осуществляется по модулю 2. Рекуррентный код, содержащий из  $n$  символов  $k$  информационных, обозначают  $(k/n)$ .

К рекуррентным кодам можно условно отнести относительный код, используемый в дискретных системах связи с относительной модуляцией фазы (ОФМ).

Важной разновидностью рекуррентных кодов являются *сверточные коды* (СК) [2, 11].

Кодер СК содержит регистры памяти для хранения определенного числа информационных символов, преобразователь информационной последовательности в кодовую (путем суммирования по модулю 2 выходов определенных ячеек регистра), а также ключ, осуществляющий коммутацию через тактовый интервал  $T$  отдельных выходов кодера и канала. Процесс кодирования производится непрерывно. Если число информационных символов, одновременно поступающих на вход кодера, обозначить через  $k$ , а через  $n$ —число соответствующих им символов на выходе кодера, то скорость кода  $R=k/n$ . Длина кодирующего регистра (ДКР), или память кода, определяется числом ячеек (разрядов) регистра  $k$ . Термин «сверточный код» означает, что кодовая последовательность может быть определена как свертка информационной последовательности  $u$  с импульсным откликом кодера (откликом кодера на последовательность  $u = 1000 \dots$ ).

Структуру  $j$ -го ( $1 \leq j \leq n$ ) выхода кодера можно определить некоторым порождающим полиномом

$$G^{(j)}(D) = g_0^{(j)} + g_1^{(j)}D + g_2^{(j)}D^2 + \dots + g_v^{(j)}D^v, \quad (5.23)$$

где  $D^r$  — оператор задержки на  $r$  тактов (разрядов),  $g^{(j)} = 1$ , если связь  $j$ -го сумматора с  $l$ -й ячейкой регистра существует, и  $g^{(j)} = 0$ , если этой связи нет. Наивысшая степень  $v$  в (5.23) называется длиной кодового ограничения (ДКО). При  $R=1/2$   $v=k-1$ .

Сверточный код можно задать порождающей матрицей

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_0 & G_1 & G_2 & \dots & G_{k-1} & \dots \\ \dots & G_0 & G_1 & G_2 & \dots & G_{k-1} & \dots \\ \dots & \dots & G_0 & G_1 & G_2 & \dots & G_{k-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Строки матрицы (5.24) представляют собой сдвинутую на соответствующее число разрядов базисную порождающую матрицу  $\mathbf{F} = |G_0 G_1 G_2 \dots G_{k-1}|$  (верхняя строка матрицы (5.24)), определяемую импульсным откликом кодера и составленную из элементарных матриц  $G_i$  ( $i = \overline{0, k-1}$ ), содержащих  $k$  строк и  $n$  столбцов. Для двоичных кодов элементами этих матриц являются символы 0 и 1.

Матрица символов на выходе кодера  $\mathbf{V}$  определяется матричным произведением

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{G}, \quad (5.25)$$

где  $\mathbf{U}$  — матрица входных информационных символов.

Сверточный код можно задать проверочной матрицей  $\mathbf{H}$ , удовлетворяющей условию

$$\mathbf{G}\mathbf{H}^T = \mathbf{0} \quad (5.26)$$

Здесь  $T$  — знак транспонирования.

При декодировании СК декодером с числом входов, равным числу выходов кодера, возможно формирование синдромов

$$\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{H}^T, \quad (5.27)$$

где  $\mathbf{X} = \mathbf{B} + \mathbf{E}$  (сигнал+шум в дискретном канале).

С учетом (5.26)

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\mathbf{H}^T, \quad (5.28)$$

По виду последнего столбца матрицы  $\mathbf{H}^T$  (читая его снизу вверх) можно определить многочлены формирователя синдромов  $H^{(v)}(D)$ .

### Задачи

5.4.1. Построить кодовые комбинации итеративного кода, на 1-й и 2-й ступенях которого использованы коды (7, 4).

5.4.2. Определить параметры двумерного итеративного кода  $n$ ,  $k$  и  $d_{\min}$ , если на 1-й и 2-й ступенях использованы коды (7, 4).

5.4.3. Определить параметры двумерного итеративного кода, в котором на 1-й ступени использован код с проверкой на четность (5, 4) с  $d_1=2$ , а на 2-й ступени — код (7, 4) с  $d_2=3$ .

5.4.4. Какой объем алфавита должен иметь дискретный источник, чтобы его символы можно было бы закодировать 7-разрядным кодом с весом  $k=3$ ? Составить кодовые комбинации такого кода. Найти избыточность кода.

5.4.5. Вероятность ошибочного приема элементарного символа кодовой комбинации  $p_0=10^{-2}$ . Чему будет равна вероятность обнаруженной ошибки при использовании кода с постоянным весом (3/4)?

5.4.6. Решить задачу 5.4.5 для следующих значений вероятности ошибочного приема элементарного символа:  $p_0=10^{-3}$ ;  $10^{-4}$ ;  $10^{-5}$ .

5.4.7. Решить задачу 5.4.5 для кодов (4/5), (3/8), (4/7), (5/6) и значений  $p_0=10^{-2}$ ;  $10^{-3}$ ;  $10^{-4}$ ;  $10^{-5}$ .

5.4.8. Составить кодовые комбинации кода с четным числом единиц, построенного на основе 5-разрядного двоичного кода. Определить избыточность полученного кода. Вычислить вероятность обнаруженной ошибки, если вероятность ошибочного приема одного знака кодовой комбинации  $p_0=10^{-2}$ .

5.4.9. Составить кодовые комбинации кода с четным числом единиц на основе 6-разрядного двоичного кода. Определить избыточность полученного кода и вычислить вероятность обнаруженной ошибки при  $p_0=10^{-2}$ ;  $10^{-3}$ ;  $10^{-4}$ ;  $10^{-5}$ .

5.4.10. Составить кодовые комбинации кода с числом единиц, кратным 3, построенного на базе 5-разрядного двоичного кода, и определить для него вероятность обнаруженной ошибки. Найти избыточность полученного кода.

5.4.11. Полагая, что первичный код является 5-разрядным, найти избыточность корреляционного кода. Определить вероятность необнаруженной ошибки.

5.4.12. Определить вероятность необнаруженной ошибки для инверсного кода, построенного на основе 5-разрядного двоичного кода.

5.4.13. Двоичный источник информации выдает последовательность символов 100111000110101. Найти контрольные символы и записать кодовую последовательность рекуррентного кода  $(1/2)$ . Составить структурную схему кодирующего и декодирующего устройства для такого кода.

5.4.14. Показать, что кодирование в системе ОФМ является рекуррентным.

5.4.15. Кодер СК с одним регистром и двумя выходами, которые поочередно коммутируются с трактом передачи, показан на рис. 5.2. Определите параметры  $R$ ,  $k$ ,  $v$ , а также порождающие полиномы для каждого из выходов  $G^{(1)}(D)$ ,  $G^{(2)}(D)$ .

5.4.16. Кодер СК с двумя регистрами и тремя выходами показан на рис. 5.3. Определите параметр  $k$  для каждого регистра, а также скорость кода  $R$ .

5.4.17. На вход кодера (рис. 5.2) подается единичная последовательность  $u=1000$ . Полагая, что начальное состояние регистра нулевое (в дискретный момент 0), изобразите состояние кодера в дискретные моменты 1, 2, 3, 4, ... (разнесенные на тактовый интервал, равный длительности информационного символа  $T$ ). Напишите двоичный импульсный отклик кодера. Найдите, пользуясь принципом суперпозиции, двоичную последовательность на выходе кодера, если информационная последовательность на входе  $u=1011$ .

5.4.18. Определить последовательность символов на выходе кодера (рис. 5.2), если при подаче на вход кодера информационной последовательности  $u=1101$  базисная порождающая матрица, определяемая импульсным откликом, найденным в задаче 5.4.17,  $F = [G_0, G_1, G_2]$ ,  $G_0=01$ ;  $G_1=11$ ;  $G_2=11$ .

5.4.19. Убедиться в том, что порождающая матрица

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

соответствует кодеру, представленному на рис. 5.4\*.

5.4.20. Проверить, является ли матрица

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

проверочной для кода, формируемого кодером рис. 5.4.

5.4.21. По транспонированной проверочной матрице

$$H^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

найти два многочлена,  $H_s^{(1)}(D)$  и  $H_s^{(2)}(D)$ , определяющие формирователь синдромов, и нарисовать схему, реализующую этот формирователь.

5.4.22. Шумовая последовательность в канале определяется вектором-строкой  $E=|101|$ . Найти синдром ошибок, если используется СК с порождающей матрицей, заданной в задаче 5.4.19.

5.4.23. Транспонированная проверочная матрица

$$H^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти многочлены  $H_s^{(1)}$  и  $H_s^{(2)}$  формирователя синдромов и нарисовать схему, реализующую формирователь.

5.4.24. Найти синдром ошибок для шумовой последовательности из задачи 5.4.22 по транспонированной проверочной матрице из задачи 5.4.23

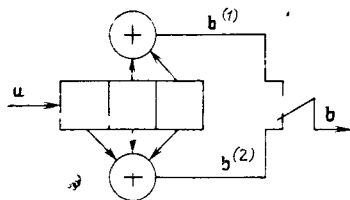


Рис 5.2 Сверточный кодер с одним регистром

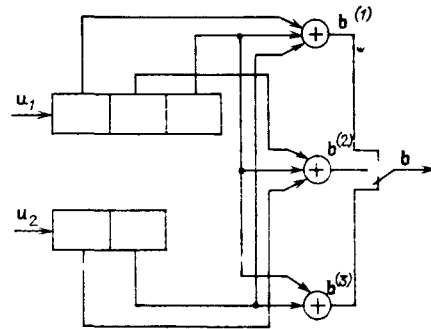


Рис 5.3 Сверточный кодер с двумя регистрами

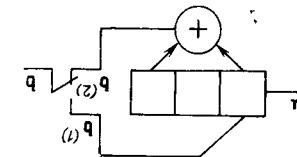


Рис 5.4 Сверточный кодер (к задаче 5.4.19)

\* Отметим, что на выходе данного кодера образуется систематический СК, для которого характерна передача в канал проверочного символа после каждого информационного тогда как во всех предыдущих задачах мы имели дело с несистематическими СК, в которых информационные символы в явном виде не присутствуют

## Глава 6. ПРИЕМ ДИСКРЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ

### 6.1. КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМА. АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМА ПРИ ТОЧНО ИЗВЕСТНОМ СИГНАЛЕ

Здесь рассматриваются лишь синхронные системы связи (элементарные символы имеют неизменную длительность  $T$  и начало отсчета фиксировано) и элементарные методы приема дискретных сообщений (последовательное вынесение приемником решения об отдельных элементарных кодовых символах  $b_{k,i}$ ;  $k=1, 2, 3, \dots$  — номер последовательно передаваемого элементарного символа;  $i=1, 2, 3, \dots$  — номер позиции кодового символа).

Одним из наиболее широко распространенных критериев оптимального приема дискретных сообщений является критерий минимума средней вероятности ошибки (критерий идеального наблюдателя).

Алгоритм работы приемника, оптимального по критерию идеального наблюдателя, можно записать так:

$$P\{b_{k,i}|z(t)\} \underset{b_{k,j}}{\cong} P\{b_{k,j}|z(t)\}, \quad i \neq j, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6.1)$$

или

$$P(b_{k,i}) \omega[z(t)|b_{k,i}] \underset{b_{k,j}}{\cong} P(b_{k,j}) \omega[z(t)|b_{k,j}], \quad (6.2)$$

т. е. сводится к проверке системы из  $(m-1)$  неравенств: регистрируется номер символа, который максимизирует сравниваемые величины. Здесь  $P\{b_{k,i}|z(t)\}$  — апостериорная вероятность передачи символа  $b_{k,i}$  при фиксации на интервале анализа  $(0, T_a)$  реализации принимаемого колебания (сигнал+шум)  $z(t)$ ;  $\omega[z(t)|b_{k,i}]$  — функция правдоподобия передачи символа  $b_{k,i}$  при фиксации  $z(t)$ . При непрерывном времени эту функцию называют функционалом правдоподобия. (В задачах оптимальной обработки будем интересоваться отношениями функционалов правдоподобия, которое, в отличие от самого функционала, сходится во всех представляющих основной практический интерес ситуациях).

Приемник, работающий в соответствии с алгоритмом

$$\omega[z(t)|b_{k,i}] \underset{b_{k,j}}{\cong} \omega[z(t)|b_{k,j}], \quad (6.3)$$

называют приемником, построенным по правилу максимального правдоподобия.

Очевидно, что, если все символы равновероятны, (6.3) следует из (6.2) и этот алгоритм обеспечивает минимизацию средней вероятности ошибки. При неизвестных априорных вероятностях  $P(b_{k,i})$  оптимальный прием в системах связи чаще всего осуществляют по алгоритму (6.3).

Логарифмируя левые и правые части (6.2), запишем этот алгоритм в эквивалентном виде:

$$\ln \omega[z(t)|b_{k,i}] + \ln P(b_{k,i}) \underset{b_{k,j}}{\cong} \ln \omega[z(t)|b_{k,j}] + \ln P(b_{k,j}). \quad (6.4)$$

Интервал анализа на приеме  $T_a$  не всегда совпадает с тактовым интервалом на передаче  $T$ . Примем, что

$$T_a = (1+D)T, \quad D=0, 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

Величину  $D$  называют фиксированной задержкой в принятии решения об элементарном символе.

Если сигналы соседних символов перекрываются в месте приема (канал с межсимвольной интерференцией, порожденной линейными искажениями (переходным процессом) или, как говорят, памятью канала), то при оптимальной обработке и учете всей энергии принимаемого сигнала приходится брать  $D > 0$ . Конкретная величина  $D$  связана с параметром  $L = \tau_{пер}/T = 0, 1, 2$  — относительной памятью канала ( $\tau_{пер}$  — практическая протяженность импульсной переходной характеристики канала). При пренебрежении межсимвольной интерференцией чаще всего берут  $T_a = T$ . Для каналов с межсимвольной интерференцией ( $L > 0$ ) могут быть построены приемные устройства, когда  $D < L$  (неполный учет энергии принимаемых сигналов) и  $D \geq L$  (полный учет энергии принимаемых сигналов). При независимых и равных вероятностях передачи кодовых символов

$$\omega[z(t)|b_{k,i}] = \sum_{k^{(L)}=1}^{m^L} \sum_{k^{(D)}=1}^{m^D} \omega[z(t)|B_{k^{(L)}-L}^{k^{(L)}-1}, b_{k,i}, B_{k^{(D)}+1}^{k^{(D)}+D}], \quad (6.6)$$

где  $\omega[z(t)|B_{k^{(L)}-L}^{k^{(L)}-1}, b_{k,i}, B_{k^{(D)}+1}^{k^{(D)}+D}]$  — функция правдоподобия того, что при фиксации  $z(t)$  на интервале  $T_a$   $k$ -й символ имел номер  $i$ , до него передавались символы  $b_{k-1}, \dots, b_{k-L}$ , а после него — символы  $b_{k+1}, \dots, b_{k+D}$ ;  $m^D$  — число различных цепочек символов, которые могли быть переданы на интервале анализа после  $k$ -го символа;  $m^L$  — число различных цепочек символов, последствием («хвосты») которых могут влиять на интервале анализа  $k$ -го символа.

Выражение (6.6) можно рассматривать как усредненную функцию правдоподобия (по символам, переданным до и после анализируемого). В условиях достаточно надежной связи (которые и должны быть обеспечены в современных системах передачи дискретных сообщений) можно считать, что символы, зафиксированные до анализируемого ( $k$ -го), действительно переданы по каналу (с вероятностью, близкой к 1). Это означает, что на интервале анализа  $T_a$  почти точно восстановлен сигнал  $g_{ост}(t)$ , порожденный «хвостами» предшествующих символов, и вместо (6.6) можно написать

$$\omega[z(t)|b_{k,i}] = \sum_{k^{(D)}=1}^{m^{(D)}} \omega[z(t) - g_{ост}(t)|b_{k,i}, B_{k^{(D)}+1}^{k^{(D)}+D}]. \quad (6.7)$$

Обозначим через  $s_{r,i}(t)$  ( $r=1, \dots, m$ )  $r$ -ю реализацию принимаемого сигнала, обусловленную на интервале  $T_a$   $i$ -й позицией  $k$ -го символа,  $L$  предшествующими символами и  $D$  последующими символами. Если сигналы  $s_{r,i}(t)$  известны точно в месте приема, а на интервале  $T_a$  имеется реализация аддитивного стационарного шума с плотностью вероятности (в общем случае многомерной)  $\omega[n(t)]$ , то

$$\omega[z(t)|B_{k^{(L)}-L}^{k^{(L)}-1}, b_{k,i}, B_{k^{(D)}+1}^{k^{(D)}+D}, r] = \omega[n(t) = z(t) - s_{r,i}(t)]. \quad (6.8)$$

Индекс  $r$  в левой части равенства означает, что берется цепочка символов до и после анализируемого, порождающая сигнал  $s_{r,i}(t)$ .

### Задачи

6.1.1. По каналу связи без памяти передаются двоичные символы  $b_1$  и  $b_2$  с вероятностями  $P(b_1)=0,6$ ;  $P(b_2)=0,4$ , причем символ  $b_1$  определяется в месте приема на интервале  $T$  сигналом  $s_1(t)=0$ , а символ  $b_2$  — сигналом  $s_2(t)=a$  (двоичная АИМ). В канале действует гауссовский стационарный шум с дисперсией  $\sigma^2=10^{-4}$  Вт. Сигналы  $s_1(t)=0$  и  $s_2(t)=10^{-2}$  В известны точно в месте приема. Какой символ зарегистрирует приемник, оптимальный по критерию минимума средней вероятности ошибки, принимающий решение по одному отсчету смеси  $z(t)=s_i(t)+n(t)$  на интервале  $T$ , если в момент принятия решения  $z=0,008$  В? Изобразите структурную схему этого приемника.

6.1.2. В условиях задачи 6.1.1. определить, какой символ будет зарегистрирован при значениях величин, заданных в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(b_1)$	0,5	0,7	0,4	0,55	0,37	0,42	0,5	0,6	0,65	0,7
$\sigma^2$ , Вт	$10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-5}$
$a$ , В	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
$z$ , В	$8 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$

6.1.3. Приемник по одному отсчету выносит решение в пользу символа  $b_1$ , если отсчет принимаемой реализации  $z(t)$  больше порога  $U_0$ ; в противном случае выносится решение в пользу символа  $b_2$ . Определить пороговое значение  $U_0$  для приемника, оптимального по критерию минимума средней вероятности ошибки, если передаваемым двоичным символам  $b_1$  и  $b_2$ , имеющим априорные вероятности  $P(b_1)$  и  $P(b_2)$ , соответствуют каналные сигналы  $s_1=a$  и  $s_2=-a$ , а в канале без памяти имеется гауссовский стационарный шум с дисперсией  $\sigma^2$ .

6.1.4. В условиях задачи 6.1.3 найти численные значения порога, соответствующие числовым значениям величин, заданным в табл. 6.2.

Таблица 6.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(b_1)$	0,1	0,9	0,2	0,8	0,3	0,7	0,4	0,6	0,15	0,85
$\sigma^2$ , Вт	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
$a$ , В	$10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$

6.1.5. Двоичные сигналы и канал те же, что в задаче 6.1.3. Приемное устройство принимает решение о переданном символе по трем независимым отсчетам  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  принимаемой смеси (в точках  $t_1=T/3$ ,  $t_2=2T/3$ ,  $t_3=T$ ).

Найти алгоритм работы приемника, оптимального по критерию минимума средней вероятности ошибки, и изобразить его структурную схему. Чему равен оптимальный порог  $U_0$  при равновероятных символах?

6.1.6. Символам  $b_i$  ( $i=1, m$ ) с вероятностью  $P(b_i)$  соответствуют известные точно в месте приема сигналы  $s_i(t)$ , определенные на интервале  $(0, T)$ . В канале имеется стационарный белый шум с энергетическим спектром  $N_0$ .

Показать, что при отсутствии межсимвольной интерференции и анализе принимаемого колебания (сигнал+шум) на всем интервале  $(0, T)$  алгоритм работы приемника, минимизирующего среднюю вероятность ошибки (приемника Котельникова), может быть записан в виде

$$\int_0^T [z(t) - s_i(t)]^2 dt - N_0 \ln P(b_i) \underset{b_i}{\approx} \times \int_0^T [z(t) - s_j(t)]^2 dt - N_0 \ln P(b_j). \quad (6.9)$$

Показать возможность реализации алгоритма (6.9) с помощью нелинейной схемы, содержащей квадраторы.

6.1.7. Показать, что в условиях задачи 6.1.6 алгоритм оптимального приема может быть записан в виде

$$\int_0^T z(t) s_i(t) dt - [E_i + N_0 \ln P(b_i)]/2 \underset{b_j}{\approx} \int_0^T z(t) s_j(t) dt - [E_j + N_0 \ln P(b_j)]/2, \quad (6.10)$$

где  $E_i = \int_0^T s_i^2 dt$  — энергия сигнала  $s_i(t)$ , и реализован с помощью

корреляционной схемы. Какие возможны упрощения в реализации оптимального приемника, если реализации сигналов  $s_i(t)$  имеют равные энергии и равные вероятности?

6.1.8. Покажите, что если в условиях задачи 6.1.7 для передачи используются двоичные символы 1 и 0 с вероятностями  $P(1)$  и  $P(0)$ , то алгоритм оптимального приема может быть записан так:

$$\int_0^T z(t) [s_1(t) - s_2(t)] dt \underset{0}{\approx} U_0, \quad (6.11)$$

$$U_0 = \{E_1 - E_2 + \ln [P(0)/P(1)]\}/2$$

и реализуется одноканальной схемой. Чему равен оптимальный порог  $U_0$ , если  $P(1)=P(0)$  и используются двоичные системы: с пассивной паузой (AM);

с активной паузой ( $E_1 = E_2$ );

с активной паузой и противоположными сигналами  $s_1(t) = -s_2(t)$  (например, ФМ с изменением фазы на  $\pi$ )?

6.1.9. При заданной реализации принимаемой смеси  $z(t)$  (сигнал+шум) апостериорные вероятности передаваемых символов 1 и 0  $P(1|z) = 0,6$  и  $P(0|z) = 0,4$ . Какой символ зарегистрирует приемник, оптимальный по критерию идеального наблюдателя?

6.1.10. Символам  $b_1$  и  $b_2$ , имеющим априорные вероятности  $P(b_1)$  и  $P(b_2)$ , соответствуют на интервале  $(0, T)$  принимаемые сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , заданные в виде точек  $s_1$  и  $s_2$  функционального пространства с метрикой Гильберта. В этом же пространстве точками  $z$  определены реализации принимаемой смеси  $z(t)$ . Разбить пространство сигналов на две непересекающиеся области  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ , приписываемые решениям соответственно в пользу символов  $b_1$  и  $b_2$  (собственные области) в предположении того, что сигналы в месте приема известны точно, в канале без памяти имеется стационарный гауссовский белый шум с энергетическим спектром  $N_0$ , принимаемое колебание анализируется на интервале  $(0, T)$  оптимальным приемником Котельникова, минимизирующим среднюю вероятность ошибки. Как будет проходить граница между собственными областями, если символы будут равновероятны?

6.1.11. На вход приемника поступает один из трех сигналов:  $s_1(t) = a \cos \omega t$ ,  $s_2(t) = b \sin \omega t$ ,  $s_3(t) = 0$  вместе с белым шумом. Поскольку эти сигналы принадлежат двумерному пространству  $R_2$ , их можно изобразить векторами на плоскости. Покажите разбиение пространства сигналов на собственные области для двух случаев:  $a = b$  и  $b = 2a$ .

6.1.12. Покажите разбиение пространства сигналов на собственные области для четырех произвольных сигналов, принадлежащих пространству  $R_2$ .

6.1.13. Независимым и равновероятным двоичным символам 1 и 0 при ФМ с изменением фазы на  $\pi$  соответствуют в канале с памятью ( $L=1$ ) ожидаемые элементарные сигналы

$$s_1(t) = g_1(t)h(t) + g_2(t-T)h(t-T); \quad s_2(t) = -s_1(t), \quad (6.12)$$

где  $g_1(t)$  — сигнал, определенный на интервале  $(0, T)$ ;  $g_2(t)$  — сигнал, определенный на интервале  $(T, 2T)$  (рис. 6.1);

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq T, \\ 0 & \text{при } x < 0, x > T. \end{cases}$$

Сигналы  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  известны точно в месте приема. Определить алгоритм оптимального приема на интервале  $T_a = 2T$  при флуктуационном шуме с энергетическим спектром  $N_0$  по критерию идеального наблюдателя. Наметьте структурную схему приемника, реализующего этот алгоритм.

6.1.14. Найти алгоритм оптимального приема в условиях задачи 6.1.13, полагая, что имеется «идеальная» обратная связь по решению (можно восстановить сигнал  $g_{\text{от}}(t)$  по зарегистрированным символам). Какова структурная схема приемного устройства?

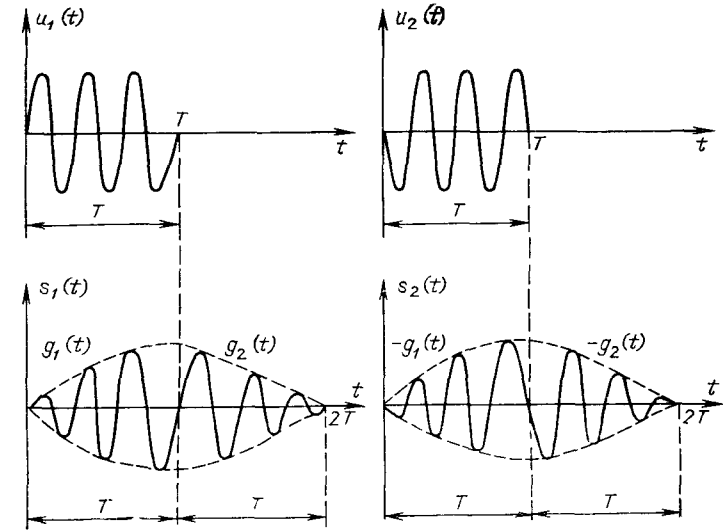


Рис. 6.1. Сигналы ФМ на входе и выходе канала с памятью

6.1.15. Найти алгоритм оптимального приема в условиях задачи 6.1.14, полагая, что анализ принимаемой смеси  $z(t)$  ведется на интервале  $T_a = T$  ( $D=0$ ). Какой схемой можно его реализовать?

## 6.2. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМА ПРИ ТОЧНО ИЗВЕСТНОМ СИГНАЛЕ НА ОСНОВЕ СОГЛАСОВАННЫХ ФИЛЬТРОВ

Линейным фильтром, согласованным с сигналом  $s_1(t)$ , называют фильтр с постоянными параметрами и импульсной переходной характеристикой

$$g(t) = as_1(t_0 - t), \quad (6.13)$$

т. е. форма последней зеркальна (относительно оси ординат, смещенной в точку  $t_0$ ) форме сигнала. Здесь  $a$  — произвольная постоянная.

Если длительность сигнала равна  $T$ , то из условия физической реализуемости следует, что

$$t_0 - T \geq 0. \quad (6.14)$$

На практике выбирают запаздывание  $t_0 = T$ .

Комплексный коэффициент передачи  $K(j\omega)$  согласованного фильтра

$$K(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt = a \dot{S}_1(j\omega) \exp(-j\omega t_0), \quad (6.15)$$

где  $\dot{S}_1(j\omega)$  — комплексно сопряженный спектр сигнала  $s_1(t)$ .

Согласованный фильтр в момент  $t_0$  при флуктуационной помехе типа «белый шум» обеспечивает на выходе максимально возможное отношение пиковой мощности сигнала к средней мощности шума

$$r_{\text{макс}}^2 = 2h^2 = 2P_c T / N_0 = 2FT\rho_{\text{вх}}. \quad (6.16)$$

Если  $t_0 = T$ , то в произвольный момент времени сигнальную компоненту на выходе согласованного фильтра можно найти как

$$y_c(t) = a \int_0^t s_i(x) s_i(x+T-t) dt = a B_{S_i}(T-t), \quad (6.17)$$

где  $B_{S_i}(t)$  — корреляционная функция сигнала  $s_i(t)$ .

В момент окончания сигнала на входе фильтра  $t = T$  сигнал на выходе согласованного фильтра достигает максимального значения

$$y_c(T) = a \int_0^T z(t) s_i(t) dt, \quad (6.18)$$

которое совпадает с точностью до множителя  $a$  с сигналом на выходе коррелятора в момент окончания сигнала (см. алгоритмы оптимального приема, полученные в задачах 6.15—6.16). Это позволяет в схеме оптимального приемника для точно известного ансамбля сигналов заменить коррелятор, состоящий из перемножителя и интегратора, согласованным фильтром.

Огибающая отклика согласованного фильтра, имеющего импульсную переходную характеристику  $g(t)$  на сигнал  $z(t)$ , определяется соотношением

$$r(t) = \sqrt{\left[ \int_0^t z(t) g(t-x) dx \right]^2 + \left[ \int_0^t z(t) \tilde{g}(t-x) dx \right]^2}. \quad (6.19)$$

**Задачи**

6.2.1. Сигнал  $s(t)$  задается функцией

$$s(t) \begin{cases} kt & \text{при } 0 \leq t < T, \\ 0 & \text{при } t > T, t < 0. \end{cases}$$

Построить график импульсной переходной характеристики фильтра, согласованного с сигналом  $s(t)$ , при условии  $t_0 = T$ .

6.2.2. Построить графики импульсных переходных характеристик фильтров, согласованных с заданными сигналами при условии  $t_0 = T$  ( $T$  — длительность сигнала):

$$1) s(t) = \begin{cases} a \exp(-\alpha t) & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t < 0, T < t; \end{cases}$$

$$2) s(t) = \begin{cases} a \exp(-\beta t^2) & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t < 0, t > T; \end{cases}$$

$$3) s(t) = \begin{cases} a [1 - \exp(-\alpha t)] & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t < 0, t > T; \end{cases}$$

$$4) s(t) = \begin{cases} b [1 - \exp(-\beta t^2)] & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t < 0, t > T; \end{cases}$$

$$5) s(t) = \begin{cases} A \cos \omega t & \text{при } 0 \leq t \leq T, T = 20\pi/\omega; \\ 0 & \text{при } t < 0, t > T. \end{cases}$$

6.2.3. Двоичные равновероятные символы передаются по каналу без памяти сигналами  $s_1(t) = A$  и  $s_2(t) = 0$  на тактовом интервале  $T$ . В канале действует аддитивный стационарный белый шум. Построить структурную схему приемника на основе согласованного фильтра.

6.2.4. Двоичные равновероятные символы передаются посредством ЧМ в канале без памяти. В месте приема на интервале анализа  $T_a = T$  им соответствуют сигналы  $s_1(t) = U_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$  и  $s_2(t) = U_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ . В канале действует стационарный белый шум. Изобразить схему оптимального приемника на базе согласованных фильтров.

6.2.5. Показать, что согласованный фильтр для сигналов произвольной формы, в принципе, можно построить на основе неискажающей линии задержки на время  $T$  ( $T$  — длительность сигнала).

6.2.6. Составить схему согласованного фильтра на базе длинной линии с отводами для однополярного и двуполярного двоичных сигналов, соответствующих последовательности символов 110010101. Нарисовать сигнал на выходе согласованного фильтра.

6.2.7. Составить схему согласованного фильтра на базе длинной линии с отводами и построить графики импульсной переходной характеристики и отклика для однополярного и двуполярного сигналов, заданных следующими двоичными последовательностями:

- |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|
| 1) 1010101;  | 2) 1110011;  | 3) 1101101;  |
| 4) 0110110;  | 5) 0001100;  | 6) 0010010;  |
| 7) 1111000;  | 8) 0001111;  | 9) 0001000;  |
| 10) 1110111; | 11) 0100010; | 12) 1100011; |
| 13) 1000001; | 14) 0111110; | 15) 0011001. |

6.2.8. Сравнить форму огибающих сигналов на выходе коррелятора и согласованного фильтра в случае подачи на их вход одиночного прямоугольного видеопульса.

6.2.9. Показать, что результат (6.16) справедлив для любой линейной системы, для которой выходной процесс определяется соотношением  $y(t) = \int_0^t s(\tau) z(\tau) d\tau$ .

6.2.10. Какой выигрыш в отношении сигнал-шум может дать фильтр, согласованный с сигналом, имеющим длительность  $T = 20$  мс и полосу частот  $F = 10$  кГц?

6.2.11. Определить, какой выигрыш в отношении сигнал-шум могут дать фильтры, согласованные с сигналами, заданными следующими двоичными последовательностями:

- |                 |               |               |
|-----------------|---------------|---------------|
| 1) 0101;        | 2) 1010;      | 3) 10101;     |
| 4) 01010;       | 5) 010101;    | 6) 101010;    |
| 7) 1010101;     | 8) 0101010;   | 9) 10111011;  |
| 10) 01000100;   | 11) 11001100; | 12) 01010101; |
| 13) 1010101010; | 14) 00001111; | 15) 11110000. |

Принять во всех последовательностях длительность элементарного символа  $\tau=5$  мс.

6.2.12. Показать, что огибающая отклика согласованного фильтра на сигнал  $z(t)=s(t)=k[\cos \theta_k u(t) - \sin \theta_k \bar{u}(t)]$  ( $k, \theta_k$  — коэффициент передачи и фазовый сдвиг канала) инвариантна к изменению фазы  $\theta_k$ .

### 6.3. ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ (ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБКИ) ОПТИМАЛЬНЫХ СХЕМ ПРИЕМА ПРИ ТОЧНО ИЗВЕСТНОМ СИГНАЛЕ

При заданной системе сигналов, канале и способе анализа принимаемой смеси сигнала и шума (по отдельным отсчетам или по континууму значений за тактовом интервале) оптимальный приемник обеспечивает минимальную вероятность ошибки.

Вероятность ошибочного перехода  $P(b_j|b_i)$  (вероятность регистрации символа  $b_j$  при условии передачи символа  $b_i$ ) определяется вероятностью невыполнения системы неравенств, задаваемых алгоритмом приема. Средняя вероятность ошибки для двоичной системы при произвольных значениях априорных вероятностей передачи символов

$$p_{\text{ош}} = \sum_{i=1}^2 P(b_i) P(\hat{b}_j|b_i), \quad j \neq i. \quad (6.20)$$

Если априорные вероятности передачи символов одинаковы, то

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 P(\hat{b}_j|b_i), \quad j \neq i. \quad (6.21)$$

Для двоичного симметричного канала, в котором вероятность ошибочного перехода не зависит от того, какой символ передавался,

$$p_{\text{ош}} = P(\hat{b}_j|b_i), \quad i, j = \overline{1, 2}, \quad j \neq i. \quad (6.22)$$

Из двоичных систем для неискажающего канала с белым гауссовским шумом особый интерес представляет система с противоположными сигналами (например ФМ с изменением фазы на  $\pi$ ). Однако ввиду реализационных трудностей (случайного перескока фазы опорного колебания и появления «обратной работы») на практике широко применяется двоичная система с ОФМ, в которой информация закладывается в разность фаз соседних посылок. Платой за устранение «обратной работы» является (в условиях надежной связи) удвоение вероятности ошибки, обусловленной шумом в канале:

$$p_{\text{ош ОФМ}} \approx 2p_{\text{ош ФМ}}. \quad (6.23)$$

Вероятность ошибки для многопозиционных систем в общем случае определяется сложнее, чем для двоичных. В области надежной связи вероятность ошибочного приема многопозиционного символа  $p_{\text{ош},m}$  при использовании системы сигналов с активной паузой в симметричном канале

$$p_{\text{ош},m} \approx (m-1)p_{\text{ош}}, \quad (6.24)$$

где  $p_{\text{ош}}$  — вероятность ошибочного приема двоичного символа в том же канале и при том же способе анализа смеси  $z(t)$ .

### Задачи

6.3.1. Определить среднюю вероятность ошибки для сигналов, канала и приемника, рассмотренных в задаче 6.1.1.

Вычислить значения средней вероятности ошибки по данным, приведенным в условиях задачи 6.1.2.

6.3.2. Определить среднюю вероятность ошибки для сигналов, канала и приемника, рассмотренных в задаче 6.1.3 при  $P(b_1) = P(b_2) = 0,5$ .

6.3.3. Вычислить значения средней вероятности ошибки для сигналов, канала и приемника, рассмотренных в задаче 6.1.3, по данным, приведенным в табл. 6.2 (см. задачу 6.1.4).

6.3.4. Определить минимальную вероятность ошибки приемника Котельникова при использовании  $m$ -позиционной системы ортогональных на интервале  $(0, T)$  сигналов с активной паузой в канале без памяти с аддитивным стационарным гауссовским белым шумом. Упростить результат для больших значений отношения сигнал-шум.

6.3.5. Определить среднюю вероятность ошибки при оптимальном приеме двоичных сигналов на фоне стационарного гауссовского белого шума в канале без памяти и анализе на интервале  $(0, T)$  при  $P(b_1) \neq P(b_2)$ . Записать выражение для средней вероятности ошибки в системе АМ (с пассивной паузой), ЧМ (с ортогональными сигналами) и ФМ (с противоположными сигналами).

6.3.6. По результатам предыдущей задачи составить выражение для средней вероятности ошибки в двоичных системах АМ, ЧМ (с ортогональными сигналами) и ФМ (с противоположными сигналами) при  $P(b_1) = P(b_2)$  (передаваемые символы равновероятны). Построить графики  $p_{\text{АМ}}, p_{\text{ЧМ}}, p_{\text{ФМ}}$  при изменении мощности передаваемого сигнала от 1 до 100 Вт, полагая, что коэффициент передачи канала  $k=10^{-2}$ , длительность сигнала  $T=10$  мс, спектральная плотность мощности шума  $N_0=10^{-7}$  Вт/Гц.

6.3.7. Показать, что при точно известном ансамбле двоичных сигналов с заданной энергией и белым шумом в канале минимально возможную вероятность ошибки обеспечивает система с противоположными сигналами.

6.3.8. Показать, что при оптимальном приеме сигналов ОФМ по методу сравнения полярностей вероятность ошибки можно оценить по формуле (6.23). Вычислить вероятность ошибки, если сигнал на передаче имеет среднюю мощность  $P_c=0,5$  Вт, коэффициент передачи канала  $k=10^{-2}$ , длительность элементарной посылки  $T=10$  мс, спектральная плотность мощности шума в канале  $N_0=10^{-7}$  Вт/Гц.



6.3.9. Вычислить значения средней вероятности ошибки при оптимальном приеме сигналов ОФМ по методу сравнения полярностей для числовых значений величин, приведенных в табл. 6.3.

Таблица 6.3

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_c$ , Вт	1	0,5	2	0,7	0,6	1,3	1,7	2,5	1,5	1
$k$	$10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-3}$
$T$ , мс	10	5	6	8	15	20	10	4	2	12
$N_0$ Вт/Гц	$10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-8}$	$9 \cdot 10^{-8}$	$10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$10^{-8}$

6.3.10. Найти энергетический выигрыш по средней и пиковой мощностям передатчика при переходе от системы АМ к системам ЧМ и ФМ и энергетический выигрыш перехода от системы ЧМ к ФМ при оптимальном приеме точно известного ансамбля сигналов, полагая вероятность ошибки неизменной.

6.3.11. Как и во сколько раз изменится вероятность ошибки при оптимальном приеме точно известного ансамбля сигналов в случае:

1) перехода от системы АМ к системе ЧМ при а) неизменной пиковой мощности передатчика; б) неизменной средней мощности передатчика;  $h^2_{AM} = 10$ ;

2) перехода от системы АМ к системе ФМ при а) неизменной пиковой мощности передатчика; б) неизменной средней мощности передатчика;  $h^2_{AM} = 10$ ;

3) перехода от системы ЧМ к системе ФМ при неизменной пиковой мощности передатчика;  $h^2_{ЧМ} = 10$ .

6.3.12. В системе двоичной ФМ использованы сигналы

$$s_i(t) = \sqrt{2E/T} \cos(\omega_0 t + (i-1)\pi); \quad i = \overline{1, 2}; \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $E$  — энергия сигналов  $s_i(t)$ ;  $T$  — длительность элементарной посылки. Опорное колебание  $s_{оп}(t)$ , необходимое для работы корреляционного приемника, имеет вид

$$s_{оп}(t) = k \sqrt{2E/T} \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности;  $\varphi$  — фазовый сдвиг, отличный от нуля. Определить вероятность ошибки, полагая, что в канале действует стационарный белый шум со спектральной плотностью мощности  $N_0$ , и оценить степень ухудшения помехоустойчивости системы по сравнению с идеальным случаем ( $\varphi = 0$ ).

Какую можно допустить фазовую расстройку  $\varphi$ , при которой энергетический проигрыш  $\eta$  не превысит значение 1,1 (потери мощности передатчика составляет 10%)? Построить графики зависимости вероятности ошибки  $p_{ош}$  и энергетического проигрыша  $\eta$  от величины фазового сдвига  $\varphi$  при значениях  $h^2 = 2; 4; 5; 8$ .

6.3.13. В системе двоичной ФМ, использующей сигналы  $s_i(t)$  из предыдущей задачи, опорное колебание формируется с помощью

высокодобротного избирательного контура, на вход которого воздействует аддитивная смесь гармонического колебания  $s(t) = ks_i(t)$  и гауссовского стационарного белого шума  $n(t)$ . Опорное колебание при этом имеет вид

$$s_{оп}(t) = A_{оп}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

причем плотность вероятности фазы описывается соотношением

$$\omega(\varphi) = \exp(-a^2/2)/2\pi + a \cos \varphi F(a \times$$

$$\times \cos \varphi) [\exp(-a^2 \sin^2 \varphi)/2]/\sqrt{2\pi}$$

( $a = a_p/\sigma$  — отношение регулярной и флуктуирующей компонент входного колебания). Полагая, что амплитуда напряжения на выходе колебательного контура постоянна и равна  $A_{оп}(t) = k\sqrt{2E/T}$ , определить вероятность ошибки.

6.3.14. В системе двоичной ФМ для передачи информации использованы сигналы

$$s_1(t) = \sqrt{2E/T} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad s_2(t) = -\sqrt{2E/T} \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Опорное колебание в корреляционном приемнике совпадает по форме с сигналом  $s_1(t)$ :  $s_{оп}(t) = \sqrt{2E/T} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ .

Полагая, что в канале действует гауссовский стационарный белый шум со спектральной плотностью мощности  $N_0$ , определить вероятность ошибки и энергетический проигрыш, если из-за неточности работы системы синхронизации интервал интегрирования сдвинут относительно начала посылки на величину  $\tau$  ( $|\tau| \leq T/2$ ).

Найти допустимую величину  $\tau$ , при которой энергетический проигрыш не превышает величину  $\eta = 1,1$ . Построить графики зависимости  $p_{ош}$ ,  $\eta$  от величины  $\tau$  при  $h^2 = 2; 4; 5; 8$ .

6.3.15. Полагая, что в системе ФМ использованы сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  из задачи 6.3.12, определить вероятность ошибки при совместном учете как тактовой рассинхронизации на величину  $\tau$ , так и несинфазности опорного и принимаемого колебаний на величину  $\varphi$ . Определить величину энергетического проигрыша. Полагая, что допустимая величина энергетического проигрыша равна 1,1, найти допустимые значения величин  $\tau$  и  $\varphi$ .

6.3.16. Полагая, что опорные колебания формируются с ошибкой по фазе на величину  $\varphi$ , а тактовая синхронизация дает ошибку  $\tau$ , найти вероятность ошибки при оптимальном когерентном приеме сигналов двоичной АМ и ЧМ и величину энергетического проигрыша. Вычислить значения  $\eta$  и  $p_{ош}$  для величин  $\varphi$ ,  $\tau$ , приведенных в табл. 6.4. Значения  $h^2$  принять равными 2; 4; 5; 8.

Таблица 6.4

$\varphi$ , град	1	2	5	10	15	20	25	30	40	50
$\tau/T$	$10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$

6.3.17. Вывести выражение для вероятности ошибки и энергетического проигрыша при оптимальном когерентном приеме сигналов двоичной ФМ в канале с точно известными параметрами и гауссовским стационарным белым шумом со спектральной плотностью мощности  $N_0$ , полагая, что для передачи информации использованы сигналы

$$s_1(t) = \sqrt{2E/T} \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad s_2(t) = -\sqrt{2E/T} \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

а опорное колебание имеет расстройку по частоте

$$s_{оп}(t) = \sqrt{2E/T} \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t + \varphi].$$

Какова допустимая расстройка  $\Delta\omega$ , при которой энергетический проигрыш не превышает 1,1? Построить зависимость вероятности ошибки  $\rho_{ош}$  и  $\eta$  от величины  $\Delta\omega$ , если  $T=20$  мс,  $h^2=4,5$ .

6.3.18. По условию предыдущей задачи найти вероятность ошибки и энергетический проигрыш при оптимальном когерентном приеме сигналов двоичной АМ и ЧМ в условиях частотной расстройки между опорным и ожидаемым колебаниями. Построить графики зависимости  $\rho_{ош АМ}$  и  $\rho_{ош ЧМ}$ ,  $\eta_{АМ}$ ,  $\eta_{ЧМ}$  от величины  $\Delta\omega$ , если  $T=10$  мс,  $h^2=8$ .

6.3.19. В канале с точно известными параметрами и гауссовским стационарным белым шумом со спектральной плотностью мощности  $N_0$  осуществляется прием двоичных сигналов ФМ: а) корреляционным приемником; б) интегральным приемником. Сравнить вероятности ошибок при данных способах приема и определить энергетический выигрыш при переходе от интегрального к корреляционному приему.

6.3.20. В системе двоичной ФМ для передачи информации использованы сигналы

$$u_1(t) = \sqrt{2E/T} \cos \omega_0 t, \quad u_2(t) = -\sqrt{2E/T} \cos \omega_0 t$$

длительностью  $T$ . Вследствие линейных искажений в канале на вход приемника поступают сигналы

$$s_1(t) = \sqrt{2E/T} \exp[-\beta^2(t-T/2)^2] \cos \omega_0 t, \\ s_2(t) = -\sqrt{2E/T} \exp[-\beta^2(t-T/2)^2] \cos \omega_0 t.$$

Полагая, что в канале действует гауссовский стационарный белый шум со спектральной плотностью мощности  $N_0$ , определить вероятность ошибки при корреляционном приеме, если опорное колебание имеет прямоугольную огибающую:

$$s_{оп}(t) = \sqrt{2E/T} \cos \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Найти энергетический проигрыш по сравнению со случаем отсутствия линейных искажений. Построить графики зависимости вероятности ошибки и энергетического проигрыша от величины  $T\beta$  при  $h^2=2; 4,5; 8$ .

6.3.21. Равновероятные символы 1 и 0 передаются посредством сигналов:  $u_1(t) = U_m \sin \omega_0 t$ ,  $u_2(t) = -U_m \sin \omega_0 t$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $\omega_0 = 2\pi/T$ .

Канал не искажает сигналов и в нем имеется аддитивный стационарный гауссовский шум с энергетическим спектром  $G_0(f) = 2\alpha/[(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2]$ . Найти вероятности ошибки при оптимальном приеме по правилу максимального правдоподобия, пользуясь методом приведения небелого шума к белому, полагая, что длительность переходного процесса на выходе «обесцвещающего» фильтра  $\tau_{пер} \ll T$ . Найти энергетический проигрыш, связанный с наличием небелого шума, по сравнению со случаем приема при наличии белого шума, имеющего в полосе  $(f_0+F, f_0-F)$  такую же среднюю мощность.

#### 6.4. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМА И ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ФАЗЕ И АМПЛИТУДЕ СИГНАЛА

Считаем, что межсимвольной интерференцией в месте приема можно пренебречь, интервал анализа  $T_a=T$ , передаваемые символы равновероятны, а канальные сигналы, соответствующие передаче  $i$ -го символа, узкополосные, т. е. могут быть представлены в виде

$$s_i(t) = k[\cos \theta u_i(t) - \sin \theta \bar{u}_i(t)], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6.25)$$

где  $\theta$  — фазовый сдвиг в канале;  $k$  — коэффициент передачи канала.

Если фаза сигнала  $\theta$  (а может быть также амплитуда и другие параметры сигнала) неизвестна на интервале анализа, то приемное устройство должно быть некогерентным\* (не требовать знания фазовых соотношений для своей реализации). По правилу максимального правдоподобия алгоритм оптимального приемного устройства в этих условиях с учетом (6.3) можно определить так:

$$\frac{\omega[z(t)|b_i, k, \theta, \dots]}{\omega[z(t)|b_j, k, \theta, \dots]} \underset{b_j}{\overset{b_i}{\geq}}, \quad (6.26)$$

где  $\omega(z(t)|b_i, k, \theta)$  — функция правдоподобия передачи символа  $b_i$  при заданном  $z(t)$  и фиксированных значениях параметров  $k, \theta$ ; черта наверху — знак усреднения по случайным (неизвестным точно) параметрам.

#### Задачи

6.4.1. Ансамбль сигналов в месте приема, соответствующий передаче  $m$  символов, определяется согласно (6.25), причем фаза  $\theta$  случайна и равномерно распределена на интервале  $(-\pi, \pi)$ . В канале действует стационарный гауссовский белый шум с энергетическим спектром  $N_0$ . Определить алгоритм оптимального приема при анализе принимаемой смеси на интервале  $T$ , показать возможность его реализации на базе корреляционной техники и на основе согласованных фильтров.

\* Анализируются оптимальные приемные устройства при неопределенной фазе, принимающие решения на основе анализа  $z(t)$  на всем временном интервале  $(0, T)$ .

6.4.2. Показать, что если используется ансамбль сигналов с активной паузой ( $E_i = \text{const}$ ) в канале с белым стационарным гауссовским шумом, то при неопределенной равномерно распределенной фазе алгоритм оптимального приема независимо от закона распределения амплитуды сигнала выражается так:

$$V_i \underset{b_j}{\overset{b_i}{\approx}} V_j, \quad i \neq j, \quad (6.27)$$

где

$$V_i = \sqrt{\left[ \int_0^T z(t) u_i(t) dt \right]^2 + \left[ \int_0^T z(t) \tilde{u}_i(t) dt \right]^2},$$

$u_i(t)$ ,  $\tilde{u}_i(t)$  —  $i$ -й сигнал на передаче и его сопряжение по Гильберту.

6.4.3. Показать, что в каналах с неопределенной фазой и флуктуационной помехой типа «белый шум» максимальную помехоустойчивость имеет система с активной паузой и ортогональными в усиленном смысле сигналами. Вычислить вероятность ошибки для двоичной системы  $\rho_{\text{ош}}$  при  $F=1$  кГц,  $N_0=10^{-11}$  Вт/Гц,  $k=10^{-8}$ ,  $P_c=10$  Вт. Каков энергетический проигрыш, связанный с незнанием фазы сигнала?

6.4.4. Определить, при какой мощности сигнала  $P_c$  вероятность ошибки в двоичной системе передачи сообщений с активной паузой и ортогональными в усиленном смысле сигналами будет принимать значения, приведенные в табл. 6.5, если  $F=1$  кГц,  $N_0=10^{-12}$  Вт/Гц,  $k^2=10^{-8}$ .

Т а б л и ц а 6.5

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\rho_{\text{ош}}$	$10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$10^{-7}$

6.4.5. Вычислить полосу частот, при которой будут обеспечиваться значения вероятности ошибки, заданные в табл. 6.5, если  $N_0=10^{-11}$  Вт/Гц,  $k^2=10^{-7}$ , а мощность сигнала  $P_c$  принимает значения, приведенные в табл. 6.6.

Т а б л и ц а 6.6

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_c$ , Вт	5	10	15	20	8	16	24	9	18	27

6.4.6. По данным задачи 6.4.3 найти вероятность ошибки  $\rho_{\text{ош } m}$  при оптимальном некогерентном приеме сигналов  $m$ -позиционной системы с активной паузой, ортогональной в усиленном смысле. Показать, что в области малых ошибок  $\rho_{\text{ош } m} \approx (m-1)\rho_{\text{ош}}$ .

6.4.7. Составить алгоритм работы оптимального приемника сигналов двоичной ОФМ при неопределенной фазе сигнала и определить вероятность ошибки. Каков энергетический проигрыш по сравнению со случаем точно известного сигнала, если  $P_c=1$  мВт,  $F=500$  Гц,  $N_0=5 \cdot 10^{-7}$  Вт/Гц?

6.4.8. Вычислить вероятность ошибки оптимального приема сигналов двоичной ОФМ при неопределенной фазе сигнала и найти значения энергетического выигрыша по сравнению со случаем точно известного сигнала для числовых значений величин, заданных в табл. 6.7.

Т а б л и ц а 6.7

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_c$ , мВт	1	1,5	2	0,5	1,2	1,0	1,5	2	2,4	2,7
$F$ , Гц	500	450	550	500	400	550	475	600	350	400
$N_0$ , Вт/Гц	$5 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-6}$

6.4.9. При неизвестных законах распределения фазы и амплитуды сигнала часто используется правило обобщенного максимального правдоподобия, сущность которого состоит в том, что из нескольких гипотез с неизвестными априорными вероятностями выбирается та, для которой максимум функции правдоподобия  $\psi(z|b_i)$  больше, чем для других гипотез, причем максимум берется по всем параметрам, определяющим плотность вероятности. Показать, что для систем с активной паузой алгоритм приемного устройства, соответствующий этому правилу, не отличается от (6.27).

6.4.10. Определить среднюю вероятность ошибки при оптимальном некогерентном приеме сигналов двоичной ЧМ в канале с неопределенной фазой и медленными замираниями в соответствии с обобщенно-рэлеевским законом распределения. Каков энергетический проигрыш (требуемое превышение мощности передатчика) при заданной вероятности ошибочного приема  $\rho_{\text{ош}}=10^{-4}$ , связанный с замираниями по обобщенно-рэлеевскому закону по отношению к каналу с неопределенной фазой, но без замираний при значениях  $q^2=\alpha^2_p/\sigma^2=2; 4; 5; 15; 20; 25; 40; 50$ .

6.4.11. Решить задачу 6.4.10 для случая замираний сигнала по закону Рэлея при вероятности ошибочного приема  $\rho_{\text{ош}}=10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}; 10^{-5}; 10^{-6}$ .

6.4.12. Решить задачу 6.4.10 для случая замираний по односторонне-нормальному закону при вероятности ошибочного приема  $\rho_{\text{ош}}=10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}; 10^{-5}; 10^{-6}$ .

6.4.13. При приеме сигналов двоичной ЧМ распространена схема рис. 6.2, в которой ПФ<sub>н</sub> и ПФ<sub>о</sub> — полосовые фильтры, пропускающие область частот  $F_s$  около частот нажатия и отжатия; Д — амплитудный детектор. В определенный момент на интервале  $T$  выбирается тот или иной символ, в зависимости от того, в какой ветви мгновенное значение огибающей окажется больше. Полагая,

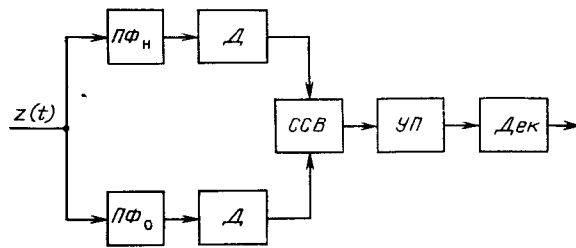


Рис. 62. Схема неоптимального некогерентного приема ЧМ-сигналов

что полоса фильтра  $F_3 = n/T$  ( $n > 1$ ,  $T$  — длительность элемента сигнала), а в канале действует гауссовский белый шум, найти вероятность ошибки и сравнить ее с вероятностью ошибки при оптимальном некогерентном приеме.

6.4.14. В условиях задачи 6.4.13 построить график зависимости энергетического проигрыша от параметра  $n$  при переходе от оптимального некогерентного приема к неоптимальному.

## Глава 7. ПРИЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ

### 7.1. ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ОТДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

Задача оптимальной оценки (измерения) параметра сигнала состоит в определении некоторым наилучшим образом значения параметра  $b$  по принятой смеси сигнала  $s(b, t)$ , зависящего от этого параметра, и аддитивного шума  $N(t)$ :

$$Z(t) = S(b, t) + N(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Из-за наличия шума в канале и конечного интервала анализа оценка параметра  $\hat{b}$  отличается от истинного значения параметра  $b$ , причем ошибка  $\epsilon = \hat{b} - b$  имеет случайный характер. Качество оценки проверяется обычно на выполнение условий несмещенности, эффективности и состоятельности. Если среднее значение ошибки равно нулю (это означает, что среднее значение оценки равно истинному значению параметра), оценка называется несмещенной:

$$M[E] = \overline{\hat{b} - b} = 0 \quad \text{или} \quad \overline{\hat{b}} = b. \quad (7.1)$$

Оценка называется эффективной, если дисперсия ошибки минимальна в классе всех возможных оценок:

$$D[E] = \overline{(E - \overline{E})^2} = \min. \quad (7.2)$$

Оценка  $\hat{b}$  называется состоятельной, если при увеличении интервала анализа  $T$  она сходится по вероятности к оцениваемому параметру

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(|\hat{b} - b| \geq \epsilon) = 0, \quad (7.3)$$

при этом  $\lim_{T \rightarrow \infty} D[E] = 0$ .

Для нахождения оценок широко применяется правило максимального правдоподобия, в соответствии с которым в качестве оценки параметра принимается такое его значение  $\hat{b}$ , которое максимизирует функцию отношения правдоподобия  $l[z|s(b)]$ , т. е.  $\hat{b}$  определяется из условия

$$\frac{\partial l[z|s(b)]}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{w[z|s(b)]}{w(n)} \right\} = 0. \quad (7.4)$$

Полученная таким способом оценка называется максимально правдоподобной. Часто уравнение, определяющее максимально правдоподобную оценку (уравнение правдоподобия), записывают в виде

$$\frac{\partial \{ \ln l[z|s(b)] \}}{\partial b} = 0. \quad (7.5)$$

Если существует несмещенная эффективная оценка максимального правдоподобия, то, как правило, уравнение правдоподобия имеет единственное решение, а полученная оценка состоятельна и асимптотически (при стремлении времени анализа  $T$  или объема выборки к бесконечности или же при ограниченном  $T$  при стремлении отношения сигнал-шум к бесконечности) эффективна и распределена нормально.

#### Задачи

7.1.1. Принимаемый сигнал можно представить в виде  $s(k, t) = ku(t, \theta)$ , где  $k$  — коэффициент передачи канала;  $\theta$  — фазовый сдвиг.

Найти максимально правдоподобную оценку коэффициента передачи канала, полагая, что сигнал  $u(t, \theta)$  точно известен в месте приема, а в канале действует гауссовский белый шум со спектральной плотностью мощности  $N_0$ . Составить структурную схему оптимального измерителя. Найти распределение ошибки измерения, ее математическое ожидание и дисперсию.

7.1.2. На вход канала поступает сигнал  $u(t)$ . Процесс на выходе канала на интервале анализа  $T$  можно представить в виде  $z(t) = ku(t) + n(t)$ , где  $k$  — коэффициент передачи канала;  $n(t)$  — реализация гауссовского шума. Спектральная плотность мощности шума в полосе  $F$  равна  $N_0$ . Полагая, что параметры сигнала в месте приема известны точно, а  $z(t)$  анализируется в дискретные моменты  $t_i$ , кратные величине  $\Delta t = 1/(2F)$ , найти максимально правдоподобную оценку коэффициента передачи канала.

7.1.3. По каналу передается сигнал  $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ . В канале действует гауссовский шум с равномерным энергетическим спектром  $N_0$  в полосе  $F = 1,1$  кГц. В результате наблюдения получено 11 независимых значений смеси сигнала и шума  $z(t)$ :  $z_1 = -2,203 \cdot 10^{-2}$  В;  $z_2 = -1,104 \cdot 10^{-1}$  В;  $z_3 = 2,133 \cdot 10^{-2}$  В;  $z_4 = 1,746 \cdot 10^{-1}$  В;  $z_5 = 6,180 \cdot 10^{-2}$  В;  $z_6 = 1,129 \cdot 10^{-1}$  В;  $z_7 = 1,770 \cdot 10^{-1}$  В;  $z_8 = -1,285 \cdot 10^{-1}$  В;  $z_9 = 7,215 \cdot 10^{-2}$  В;  $z_{10} = -3,115 \cdot 10^{-2}$  В;  $z_{11} = -6,702 \cdot 10^{-2}$  В.

Найти максимально правдоподобную оценку амплитуды сигнала на выходе канала, если  $f_0 = 47,1$  кГц,  $\varphi_0 = 0$ ,  $U_m = 0,1$  В, а первое значение  $z(t)$  найдено при  $t = 0$ .

7.1.4. Решить задачу 7.1.3 для следующих вариантов числовых значений величин:

а) $U_m = 0,2$ В	$f_0 = 37,93$ кГц	$\varphi_0 = 30^\circ$ ;
б) $U_m = 0,3$ В	$f_0 = 51,72$ кГц	$\varphi_0 = 57^\circ$ ;
в) $U_m = 0,4$ В	$f_0 = 49,3$ кГц	$\varphi_0 = 49^\circ$ ;
г) $U_m = 0,45$ В	$f_0 = 27,2$ кГц	$\varphi_0 = 15^\circ$ .

7.1.5. По условиям задач 7.1.3 и 7.1.4 найти ошибку оценивания амплитуды сигнала.

7.1.6. Найти максимально правдоподобную оценку коэффициента передачи канала из задачи 7.1.1 при неопределенной фазе  $\theta$  и составить структурную схему для оптимального измерителя.

7.1.7. На вход канала со случайно изменяющимся фазовым сдвигом поступает сигнал  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ . В канале действует гауссовский шум со спектральной плотностью  $N_0$  в полосе  $F = 1,7$  кГц. В результате наблюдения получено 10 независимых значений реализации смеси сигнала и шума  $z(t)$ :

$z_1(t) = 1,05 \cdot 10^{-2}$	$z_2(t) = -9,01 \cdot 10^{-3}$	$z_3(t) = 8,15 \cdot 10^{-3}$
$z_4(t) = 1,15 \cdot 10^{-2}$	$z_5(t) = 1,19 \cdot 10^{-3}$	$z_6(t) = -6,51 \cdot 10^{-3}$
$z_7(t) = 7,18 \cdot 10^{-2}$	$z_8(t) = 3,16 \cdot 10^{-2}$	$z_9(t) = -2,10 \cdot 10^{-3}$
$z_{10}(t) = 1,16 \cdot 10^{-2}$		

отсчитанных в моменты  $t$ , кратные величине  $\Delta t = 1/(2F)$ . Найти максимально правдоподобную оценку коэффициента передачи канала  $k$ , если  $f = 47,1$  кГц,  $\varphi_0 = 45^\circ$ , а первое значение  $z(t)$  найдено при  $t = 0$ ,  $N_0 = 10^{-4}$  Вт/Гц.

7.1.8. Показать, что при больших отношениях сигнал-шум максимально правдоподобная оценка амплитуды сигнала при неопределенной фазе является состоятельной, несмещенной, асимптотически эффективной, а ее качество такое же, как при определенной фазе сигнала.

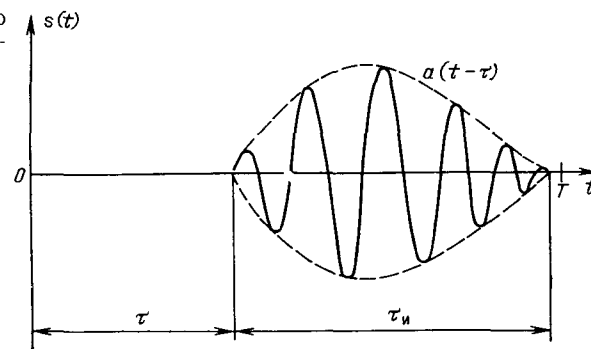
7.1.9. Найти максимально правдоподобную оценку фазы сигнала в канале с флуктуационным белым шумом. Составить схему оптимального измерителя. В области больших значений отношения сигнал-шум найти распределение для  $\hat{\varphi}$ , математическое ожидание и дисперсию этой величины.

7.1.10. В результате измерения получено 10 независимых значений смеси сигнала и шума в дискретные моменты, кратные  $\Delta t = 1/(2F)$ :

$z_1 = 0,201$ В	$z_2 = 0,115$ В	$z_3 = -0,082$ В	$z_4 = -0,126$ В
$z_5 = -0,292$ В	$z_6 = 0,158$ В	$z_7 = 0,092$ В	$z_8 = 0,0102$ В
$z_9 = -0,171$ В	$z_{10} = 0,158$ В		

Известно, что  $z(t) = kU_m \cos(\omega t + \varphi)$ , причем фаза имеет случайное значение, равномерно распределенное на интервале  $(0, 2\pi)$ ;  $n(t)$  — гауссовский шум с равномерным энергетическим спектром  $N_0$  в полосе  $F = 1,5$  кГц. Найти максимально правдоподобную оценку фазы сигнала  $\varphi$ , если  $kU_m = 0,2$  В,  $f = 51,0$  кГц.

Рис. 7.1. К определению оптимальной оценки времени прихода сигнала



7.1.11. На вход приемника в пределах интервала анализа  $(0, T)$  поступает смесь гауссовского белого шума с энергетическим спектром  $N_0$  и сигнал в виде радиопульса  $s(t) = a(t-\tau) \cos(\omega t + \varphi) \cdot h(t-\tau)$  (рис. 7.1) с известной огибающей  $a(t-\tau)$ , частотой  $\omega$ , длительностью  $\tau_n$ , случайным временем прихода и случайной фазой,

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq \tau_n, \\ 0 & \text{при } \tau_n < x; 0 > x. \end{cases}$$

Найти оптимальную по критерию максимума апостериорной вероятности оценку времени прихода сигнала  $\hat{\tau}$ , полагая, что этот параметр равномерно распределен на интервале  $(0, T)$ , а случайная фаза  $\varphi$  не зависит от  $\tau$  и равномерно распределена на интервале  $(-\pi, \pi)$ .

При большом отношении сигнал-шум найти распределение апостериорной вероятности оцениваемого параметра, математическое ожидание и дисперсию оценки.

7.1.12. На вход приемника в пределах интервала анализа  $(0, T)$  поступает смесь гауссовского белого шума и сигнала в виде прямоугольного радиопульса (см. задачу 7.1.11) с  $\tau_n = T$  и известным временем прихода  $\tau = 0$ , со случайной равномерно распределенной фазой  $\varphi$ , известной амплитудой  $a$  и случайной частотой  $\omega$ . Найти оптимальную по критерию максимума апостериорной вероятности оценку частоты  $f = \hat{\omega}/2\pi$ , полагая, что этот параметр имеет равномерное распределение в пределах интервала  $(f_{\min}, f_{\max})$ . Параметры  $\varphi$  и  $\omega$  считать независимыми. Наметьте структурную схему оптимального измерителя частоты. При большом отношении сигнал-шум,  $f - f_0 < 1/T$ ,  $f_0 T \gg 1$  ( $f_0$  — истинное значение частоты принимаемого сигнала) найти распределение апостериорной вероятности оцениваемой частоты сигнала, математическое ожидание и дисперсию оценки.

7.1.13. Прямоугольный радиопульс  $s(t, a) = a \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $0 < t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_n < T$  принимается на фоне гауссовского стационарного шума. Корреляционная функция шума  $B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$ . Определить дисперсию оценки амплитуды  $\hat{a}$  импульса, приняв  $\tau_n =$

$= 10^{-2}$  с,  $f_0 = 20$  кГц,  $\sigma^2 = 0,01$  Вт,  $\alpha = 10^{-1}$  с $^{-1}$ ;  $10^{-2}$  с $^{-1}$ ;  $10^{-3}$  с $^{-1}$ ;  $10^{-4}$  с $^{-1}$ .

7.1.14. Найти дисперсию оценки амплитуды  $\hat{A}$  импульса гауссовской формы

$$s(t, a) = A \exp[-2,8(t - \tau_0)^2/\tau_n^2], \quad 0 < \tau_0 < T,$$

принимаемого на фоне гауссовского стационарного шума с экспоненциальной корреляционной функцией  $B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$ .

7.1.15. Решить задачу 7.1.13 при условии, что сигнал принимается на фоне узкополосного шума с корреляционной функцией

$$B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) [\cos \omega_1 \tau + (\alpha \sin \omega_1 |\tau|)/\omega_1].$$

Упростить результат для случая  $\omega = \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}$ .

7.1.16. Найти дисперсию оценки временного положения  $\hat{\tau}$  импульса гауссовской формы

$$s(t, \tau_0) = A \exp[-2,8(\tau - \tau_0)^2/\tau_n^2],$$

принимаемого на фоне белого шума, если импульс практически полностью располагается внутри интервала наблюдения.

7.1.17. Решить предыдущую задачу для случая, когда в канале действует шум с корреляционной функцией  $B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$ .

## 7.2. ОПТИМАЛЬНАЯ ДЕМОДУЛЯЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ. РАСЧЕТ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ АНАЛОГОВЫХ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ

При передаче непрерывных сообщений принимаемое колебание  $z(t)$  на интервале  $(0, T)$  представляет собой аддитивную смесь сигнала известной формы  $s[b(t), t]$ , зависящего от одного меняющегося во времени параметра  $b(t)$  (сообщения), и аддитивного шума  $n(t)$ :

$$z(t) = s[b(t), t] + n(t).$$

По принятому колебанию  $z(t)$  необходимо наилучшим образом решить, какая реализация сообщения  $b(t)$  передавалась, т. е. в этом случае также можно ставить вопрос об оптимальной в определенном смысле оценке  $\hat{b}(t)$ . Оптимальный прием меняющегося во времени параметра (непрерывного сообщения) можно свести к задаче совместного оптимального приема многих параметров.

Если представить сообщение  $b(t)$  на интервале  $T$  обобщенным рядом Фурье

$$b(t) = \sum_{k=1}^{B_c} \lambda_k \varphi_k(t), \quad (7.6)$$

(здесь  $\{\varphi_k(t)\}$  — система ортонормированных функций;  $\lambda_k$  — координаты (параметры) непрерывного сообщения  $b(t)$ ;  $B_c$  — база сообщения), то принимаемое колебание

$$z(t) = s(\lambda, t) + n(t),$$

где  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{B_c}\}$  — вектор параметров сообщения  $b(t)$ .

Совместные максимально правдоподобные оценки координат сообщения определяются из условия

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \{l(z|\lambda)\} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \{\ln l(z|\lambda)\} = 0, \quad (7.7)$$

где  $l(z|\lambda)$  — функционал отношения правдоподобия. При флуктуационном белом шуме и известной форме сигнала  $s(\lambda, t)$

$$l(z|\lambda) = \exp \left[ \frac{2}{N_0} \int_0^T z(t) s(\lambda, t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T S^2(\lambda, t) dt \right]. \quad (7.8)$$

Зная оценки параметров  $\hat{\lambda}_k$ , можно найти оценку сообщения

$$\hat{b}(t) = \sum_{k=1}^{B_c} \hat{\lambda}_k \varphi_k(t). \quad (7.9)$$

Ошибка  $\varepsilon = \hat{b}(t) - b(t)$  может рассматриваться как помеха (шум) на выходе приемника (детектора).

Спектральная плотность мощности шума на выходе детектора при оптимальном приеме и больших значениях отношения сигнал-шум в канале определяется формулой

$$G_{\text{вых}}(f) = N_0 \left/ \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \{s[b(t), t]\} \right]^2 \right., \quad (7.10)$$

где  $\lambda_k$  — координаты разложения  $b(t)$  в обычный ряд Фурье.

Качество непрерывных систем связи часто оценивают выигрышем модема в отношении сигнал-шум

$$g = \rho_{\text{вых}} / \rho_{\text{вх}}. \quad (7.11)$$

Здесь  $\rho_{\text{вх}} = (P_c/P_{\text{ш}})_{\text{вх}}$  — отношение средних мощностей сигнала и шума на входе приемника;

$$\rho_{\text{вых}} = \overline{b^2(t)} \left/ \int_0^{F_c} G_{\text{вых}}(f) df \right.$$

— отношение средних мощностей сигнала и шума на выходе приемника (детектора). Величину  $\rho_{\text{вых}}$  удобно выразить через пик-фактор сообщения

$$\Pi = |b(t)|_{\text{макс}} / \sqrt{\overline{b^2(t)}}.$$

При  $|b(t)|_{\text{макс}} = 1^*$

$$\rho_{\text{вых}} = 1 \left/ \left( \Pi^2 \int_0^{F_c} G_{\text{вых}}(f) df \right) \right. \quad (7.12)$$

Очень часто качество непрерывных систем связи оценивают обобщенным выигрышем

$$g' = \rho_{\text{вых}} F_c / \rho_{\text{вх}} F = g F_c / F = g / \alpha, \quad (7.13)$$

где  $F_c$  — полоса сообщения  $b(t)$ ;  $F$  — полоса сигнала  $s[b(t), t]$ ;  $\alpha = F/F_c$ .

\* В дальнейшем везде сообщение будем считать нормированным,

Обобщенный выигрыш систем с двойной модуляцией (при условии, что на второй ступени используется прямая модуляция)\*, может быть найден как произведение обобщенных выигрышей

$$g' = g'_{\text{в}} g'_{\text{пн}}, \quad (7.14)$$

где  $g'_{\text{в}}$  — обобщенный выигрыш при демодуляции несущего колебания;  $g'_{\text{пн}}$  — обобщенный выигрыш при демодуляции поднесущего колебания.

В широкополосных системах модуляции при некотором пороговом отношении сигнал-шум на входе приемника  $\rho_{\text{пор}}$  качество связи резко падает (пороговый эффект). Пороговый эффект выражен тем резче, чем больше частотная избыточность сигнала, определяемая отношением ширины полосы сигнала и сообщения  $\alpha$ .

## Задачи

7.2.1. Записать ортогональные разложения для ограниченного интервалом  $T$  сообщения  $b(t)$  на передаче,  $\hat{b}(t)$  на приеме и помехи  $\varepsilon(t)$  на выходе приемника (детектора). Считать, что полоса сообщения равна  $F_c$ . Выбрать в качестве базиса разложения систему ортонормированных функций  $\sqrt{2} \cos(2k\pi t/T)$  и  $\sqrt{2} \sin(2k\pi t/T)$ .

7.2.2. Показать, что при слабом белом гауссовском шуме в канале и известной точно форме сигнала помеха на выходе оптимального приемника  $\varepsilon(t)$  — стационарный гауссовский процесс с некоррелированными координатами и энергетическим спектром

$$G_{\text{вых}}(f) = N_0 / (\partial s(\lambda, t) / \partial \lambda)^2.$$

7.2.3. Найти спектральную плотность мощности шума на выходе детектора прямых систем модуляции при слабом флуктуационном шуме в канале и известной форме сигнала.

7.2.4. Вычислить спектральную плотность мощности шума на выходе приемника сигналов амплитудной модуляции и построить его зависимость от коэффициента глубины модуляции  $m$ , от амплитуды несущего колебания.

7.2.5. Вычислить спектральную плотность мощности шума на выходе приемника ФМ-сигналов и построить ее зависимость от индекса фазовой модуляции  $\beta_{\text{ФМ}}$ .

7.2.6. Показать, что ОМ нельзя строго отнести к прямым системам, а дисперсия произвольной координаты шума на выходе оптимального приемника при «слабой» флуктуационной помехе в канале определяется для этой системы формулой  $\sigma^2_{\text{н}} =$

$= N_0 / (2Tk^2U^2_m)$  и, как для произвольной прямой системы, не зависит от частоты.

7.2.7. Найти предельные значения выигрыша и обобщенного выигрыша в отношении сигнал-шум при известной форме сигнала и слабом шуме в канале.

7.2.8. Найти общие выражения для предельных значений выигрыша и обобщенного выигрыша прямых систем модуляции при слабом шуме в канале.

7.2.9. Найти общие выражения для предельных значений выигрыша интегральных систем модуляции при слабом шуме в канале.

7.2.10. Определить выигрыш и обобщенный выигрыш для системы АМ при слабом шуме в канале. Построить зависимость выигрыша от коэффициента глубины модуляции.

7.2.11. Найти предельные значения выигрыша и обобщенного выигрыша для системы БМ при слабом шуме в канале и показать, что они реализуются при синхронном детектировании БМ-сигналов.

7.2.12. Найти предельные значения выигрыша и обобщенного выигрыша для системы ОМ.

7.2.13. Определить предельные значения выигрыша и обобщенного выигрыша для системы ФМ при слабом шуме в канале. Построить зависимость выигрыша и обобщенного выигрыша от индекса модуляции. Убедиться в том, что при слабом шуме в канале используемая на практике схема детектирования ФМ обеспечивает предельную помехоустойчивость.

7.2.14. Найти энергетический спектр шума на выходе детектора интегральных систем модуляции при слабом флуктуационном шуме в канале и известной форме сигнала.

7.2.15. Определить выигрыш и обобщенный выигрыш для системы ЧМ при слабом шуме в канале и построить зависимость их от индекса частотной модуляции. Сравнить полученные зависимости с соответствующими зависимостями в системе ФМ.

7.2.16. Показать, что при слабом шуме в канале распространенная схема частотного детектирования обеспечивает предельное значение обобщенного выигрыша.

7.2.17. Показать, что для системы АИМ предельное значение выигрыша  $g_{\text{АИМ}} = 1 / (\tau_{\text{н}} F_c)$ , а обобщенного выигрыша  $g'_{\text{АИМ}} = 1$ , где  $\tau_{\text{н}}$  — длительность импульса,  $F_c$  — ширина спектра сообщения.

7.2.18. Показать, что для системы ФИМ предельные значения выигрыша и обобщенного выигрыша определяются формулами

$$g_{\text{ФИМ}} = \frac{0,6}{\Pi^2} \left( \frac{F}{F_c} \right)^3; \quad g'_{\text{ФИМ}} = \frac{0,6}{\Pi^2} \left( \frac{F}{F_c} \right)^2,$$

где  $F$  — ширина спектра сигнала.

7.2.19. Найти значения обобщенного выигрыша для систем двойной модуляции: ОМ—АМ, ФМ—БМ, ЧМ—БМ, ОМ—ФМ, АМ—ФМ, БМ—ФМ, БМ—АМ.

7.2.20. Используя соотношение для выигрыша идеальной системы связи и реальных систем, показать, что пороговый эффект

\* Прямыми называются системы модуляции, в которых модулированный сигнал  $s[b(t), t]$  в момент  $t$  зависит от значений сообщения в тот же момент времени. Остальные системы модуляции относят к непрямым. В частности, непрямыми являются интегральные системы модуляции, в которых модулированный сигнал  $s[b(t), t]$  в момент  $t$  зависит от интеграла модулирующей функции. К прямым системам модуляции можно отнести АМ, БМ, ФМ и т. п., к непрямым — ЧМ.

выражен тем резче, чем больше частотная избыточность канального сигнала.

7.2.21. Определить пороговое отношение сигнал-шум для реальной системы ЧМ в канале с гауссовским белым шумом, полагая, что качество этой системы резко падает, когда огибающая шума превышает амплитуду сигнала.

7.2.22. Найти максимально возможное значение индекса модуляции системы ЧМ, при котором обеспечивается работа выше порога, найденного в 7.2.21, если требуется обеспечить отношение сигнал-шум на выходе детектора  $\rho_{\text{вых}} = 4600$ . Пик-фактор сообщения  $\Pi = 3$ .

### 7.3. ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СРЕДНЕГО КВАДРАТА ОШИБКИ

При непосредственной передаче сообщений  $B(t)$  (без модуляции) принимаемое колебание  $Z(t)$  (сигнал плюс шум)

$$Z(t) = S(t) + N(t), \quad S(t) = B(t). \quad (7.15)$$

Полагая, что  $S(t)$ ,  $N(t)$  — стационарные, несвязанные случайные процессы с энергетическими спектрами  $G_S(f)$ ,  $G_N(f)$ , оценим качество передачи непрерывного сигнала  $S(t)$  (сообщения  $B(t)$ ) средним квадратом ошибки

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{[\hat{S}(t + \tau) - S(t)]^2}, \quad (7.16)$$

где  $\hat{S}(t + \tau)$  — оценка сигнала в момент  $t + \tau$ ;  $\tau$  — время запаздывания в устройстве оценки (фильтре).

В классе линейных фильтров \* передаточная функция оптимального фильтра Колмогорова — Винера (обеспечивающего  $\overline{\varepsilon^2_{\text{мин}}}$ )

$$K(j2\pi f) = G_S(f) \exp(-j2\pi f \tau) / (G_S(f) + G_N(f)), \quad (7.17)$$

а средний квадрат ошибки такого фильтра (достигаемый при  $\tau \rightarrow \infty$ )

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_S(f) G_N(f)}{G_S(f) + G_N(f)} df. \quad (7.18)$$

Реализуемая часть  $K(j2\pi f)$ , определяемого (7.17), дается формулой

$$K(j2\pi f) = K_1(j2\pi f) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1^*(j2\pi \nu) G_S(0) e^{j2\pi(0-f)\nu} d\nu df. \quad (7.19)$$

Примем, что  $1/[G_S(f) + G_N(f)] = K_1(j2\pi f) K_1^*(j2\pi f)$  — нереализуемая характеристика обеляющего фильтра;  $K_1(p)$  — реализуемая передаточная функция (все нули и полюса лежат в левой полуплоскости);  $K_1^*(p)$  — нереализуемая передаточная функция \*\*.

\* Применение нелинейного фильтра не уменьшает  $\overline{\varepsilon^2}$ , если  $s(t)$  и  $N(t)$  — гауссовские процессы.

\*\* Нереализуем также фильтр с передаточной функцией  $K_1^*(j2\pi f) G_S(f)$ .

Характеристики реализуемого линейного фильтра, обеспечивающего  $\overline{\varepsilon^2(t)_{\text{мин}}}$  (при несмещенности оценки  $\overline{\varepsilon(t)} = 0$ ) даже при  $\tau = 0$  и нестационарных процессах  $S(t)$  и  $N(t)$  с корреляционными функциями  $B_S(t_1, t_2)$ ,  $B_N(t_1, t_2)$  можно получить на основе метода стохастических дифференциальных уравнений.

Представим  $S(t)$  как первую компоненту многомерного марковского процесса с уравнением состояния

$$\dot{x}(t) = f(t)x(t) + g(t)v(t), \quad (7.20)$$

где  $v(t)$  — порождающий гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и единичной спектральной плотностью, матрицы  $f(t)$ ,  $g(t)$  определяются корреляционной функцией процесса  $S(t)$ .

Уравнение наблюдения

$$z(t) = G(t)x(t) + N(t). \quad (7.21)$$

При  $G(t) = |10 \dots 0 \dots 0|$  из (7.21) получим (7.15).

Фильтр Калмана, обеспечивающий минимум среднеквадратической ошибки между  $x(t)$  и ее оценкой  $\hat{x}(t)$  при подаче на вход (7.21), определяется уравнением

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(t)x(t) + \kappa(t)G_N^{-1}[z(t) - c(t)\hat{x}(t)], \quad (7.22)$$

где  $G_N$  — спектральная плотность шума  $N(t)$ , который считается белым. Величина  $\kappa(t) = \overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{[\hat{x}(t) - x(t)]^2}$  определяется дифференциальным уравнением Риккати:

$$\dot{\kappa}(t) = f(t)\kappa(t) + \kappa(t)f^T(t) - \kappa(t)G_N^{-1}k^T(t) + d(t)d^T(t). \quad (7.23)$$

Реализуемые схемы для оптимального приема (оценки) непрерывного сообщения  $b(t)$ , содержащегося в модулированном сигнале  $s(b(t), t)$ , принимаемого на фоне аддитивного шума  $n(t)$  по критерию минимума среднего квадрата ошибки  $\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{[\hat{b}(t) - b(t)]^2}$ , можно получить на основе теории нелинейной фильтрации.

Пусть сообщение  $b(t)$  описывается уравнением состояния

$$\dot{b}(t) = -ab(t) + V(t), \quad (7.24)$$

где  $V(t)$  — стационарный белый шум с характеристиками

$$\overline{V(t)} = 0; \quad \overline{V(t_1)V(t_2)} = \frac{1}{2} G_V \delta(t_2 - t_1). \quad (7.25)$$

Коэффициент сноса  $A_1(b, t) = -ab(t)$ , диффузии  $A_2(b, t) = G_V/2$ .

Принимаемое колебание  $Z(t)$  на интервале  $(0, T)$  представляет собой сумму сигнала  $S(t, b)$  и стационарного белого шума  $N(t)$ :

$$Z(t) = S[t, b(t)] + N_1(t); \quad \overline{N(t)} = 0; \quad \overline{N(t_1)N(t_2)} = \delta(t_2 - t_1) N_0/2. \quad (7.26)$$

Изменение во времени плотности вероятности  $\omega[\hat{b}(t), t]$  при данном  $z(t)$  подчиняется уравнению Колмогорова — Фоккера — Планка, которое при доста-



точно больших значениях отношения сигнал-шум и времени наблюдения приводит к следующим уравнениям для оптимальной оценки и дисперсии ошибки:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{b}}(t) &= -\alpha \hat{b}(t) + \kappa(t) \frac{\partial F(\hat{b}, t)}{\partial \hat{b}}, \\ \dot{\kappa}(t) &= -2\alpha \kappa(t) + \kappa^2(t) \frac{\partial^2 F(\hat{b}, t)}{\partial \hat{b}^2} + \frac{1}{2} G_V, \end{aligned} \quad (7.27)$$

где  $F[\hat{b}(t), t] = \frac{d}{dt} \ln \omega(z|b)$  — производная по времени к концу интервала обработки логарифма функции правдоподобия. При белом шуме в канале с точностью до константы

$$F[\hat{b}(t), t] = -\{z(t) - s[t, \hat{b}(t)]\}^2 / N_0. \quad (7.28)$$

Если  $b(t)$  является неэнергетическим параметром для  $s[t, b(t)]$  (например, при ФМ и ЧМ), то можно принять

$$F[\hat{b}(t), t] = 2z(t)s[t, \hat{b}(t)]/N_0. \quad (7.29)$$

### Задачи

7.3.1. Энергетические спектры сигнала и аддитивного шума определены на положительных частотах соотношениями

$$G_s(f) = \begin{cases} Af/F & \text{при } 0 \leq f \leq F, \\ 0 & \text{при } f > F, \end{cases}$$

$$G_N(f) = \begin{cases} A - Af/F & \text{при } 0 \leq f \leq F, \\ 0 & \text{при } f > F. \end{cases}$$

Определить коэффициент передачи (модуль) оптимального фильтра Колмогорова — Винера и найти энергетические спектры ошибки, полезного сигнала и шума на выходе фильтра, средние мощности трех этих компонент, а также параметр  $\rho_{\text{вых}}$  (отношение сигнал-шум).

7.3.2. Сигнал и шум, энергетические спектры которых даны в предыдущей задаче, поступают на идеальный фильтр нижних частот с амплитудно-частотной характеристикой

$$K(\omega) = \begin{cases} K_0 \leq 1 & \text{при } 0 \leq f \leq F, \\ 0 & \text{при } 0 > f, F < f. \end{cases}$$

Найти средний квадрат ошибки и отношение средних мощностей сигнала и шума  $\rho_{\text{вых}} = \overline{y_s^2} / \overline{y_n^2}$  на выходе этого фильтра. Сопоставить эти параметры с соответствующими параметрами оптимального фильтра.

7.3.3. Заданы  $G_s(f) = 2\alpha P_s (\alpha^2 + \omega^2)^{-1}$  и  $G_N(f) = 0,5 N_0$ . Найти квадрат модуля коэффициента передачи нереализуемого (при  $\tau=0$ ) обесцараживающего фильтра и показать, что его реализуемая часть  $K_1(j\omega) = \sqrt{2/N_0} (1 + j\omega\alpha^{-1}) (\sqrt{1+\Lambda} + j\omega\alpha^{-1})^{-1}$ ;  $\Lambda = 4P_s\alpha^{-1}N_0^{-1}$ . Най-

ти передаточную функцию оптимального реализуемого при  $\tau=0$  фильтра Колмогорова — Винера.

7.3.4. Показать, что реализуемый оптимальный фильтр задачи 7.3.3 можно выполнить с помощью интегрирующей RC цепочки, имеющей постоянную времени  $RC = \alpha^{-1}(1+\Lambda)^{-0,5}$ , и каскада с коэффициентом передачи  $(\sqrt{1+\Lambda}-1)(1+\Lambda)^{-0,5}$ .

7.3.5. Показать, что передаточную функцию любого реализуемого оптимального фильтра  $F_p(j\omega)$  можно получить, используя линейную систему с обратной связью (рис. 7.2), если  $H(j\omega) = F_p(j\omega) [1 - F_p(j\omega)]^{-1}$ . Показать, что если реализуема передаточная функция  $F_p(j\omega)$ , то реализуем и фильтр с передаточной функцией  $H(j\omega)$ .

7.3.6. Показать, что реализуемый оптимальный фильтр задачи 7.3.5 можно выполнить по схеме с обратной связью (рис. 7.3), если постоянная времени интегрирующей цепочки  $RC = 1/\alpha$ . Написать уравнения состояния, описывающие эту схему.

7.3.7. На вход фильтра Калмана подается колебание (7.15), причем сигнал  $s(t)$  описывается уравнением состояния (7.20). Показать, что уравнение оптимальной фильтрации (относительно  $\hat{s}(t)$ ) имеет вид

$$\dot{\hat{s}}(t)/dt = -\alpha \hat{s}(t) + \alpha (\sqrt{1+\Lambda} - 1) [z(t) - \hat{s}(t)]$$

и совпадает с уравнением состояния задачи 7.3.6, а схема оптимального фильтра не отличается от схемы рис. 7.2.

7.3.8. Найти дисперсию ошибки фильтрации (задача 7.3.7) в установившемся режиме.

7.3.9. Показать, что при прямой передаче ( $s[t, b(f)] = ab(t)$ ,  $b(t)$  — марковский гауссовский процесс, описываемый уравнением (7.24)), уравнения (7.25) нелинейной фильтрации переходят в уравнения линейной фильтрации:

$$\dot{\hat{b}} = -\alpha \hat{b} + \kappa(t) a [z(t) - \hat{b}(t)]/N_0,$$

$$\dot{\kappa}(t) = -2\alpha \kappa(t) - \kappa^2(t) a^2/N_0 + G_V/2.$$

7.3.10. Показать, что при балансной амплитудной модуляции ( $s[t, b(t)] = k_{\text{БМ}} \hat{b}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , где  $b(t)$  — марковский гауссов-

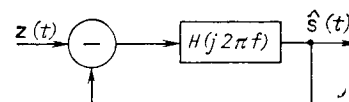


Рис. 7.2. Линейная система с обратной связью (к задаче 7.3.5)

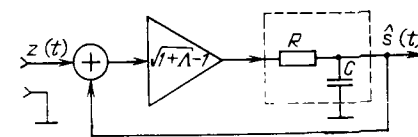


Рис. 7.3. Линейная система с обратной связью (к задаче 7.3.6)

ский процесс, описываемый уравнением (7.24)), уравнения оптимальной фильтрации принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\hat{b}}(t) &= -(\alpha + k_{\text{БМ}}^2 \kappa(t)/N_0) \hat{b}(t) + 2\kappa(t) k_{\text{БМ}} z(t) \cos(\omega_0 t + \Phi_0)/N_0, \\ \dot{\kappa}(t) &= -2\alpha \kappa(t) - \kappa^2(t) k_{\text{БМ}}^2/N_0 + G_V/2. \end{aligned}$$

7.3.11. Показать, что схема синхронного радиоприема (рис. 7.4) реализует оптимальную фильтрацию [см. задачу (7.3.10)] в установившемся режиме ( $t \rightarrow \infty$ ), если выбрать постоянную интегрирующей цепочки  $RC = 1/(\alpha + \kappa k_{\text{БМ}}^2/N_0)$ , а амплитуду местного гетеродина  $u_r = 2\kappa k_{\text{БМ}}/N_0 RC$ . При этом

$$\kappa = \alpha N_0 k_{\text{БМ}}^{-2} [(1 + 0,5 G_V k_{\text{БМ}}^2 \alpha^{-2} N_0^{-1})^{0,5} - 1].$$

7.3.12. Показать, что при ФМ ( $s[t, b(t)] = U_0 \cos(\omega t + k_{\text{ФМ}} b(t) + \Phi_0)$ )  $b(t)$  — марковский гауссовский процесс, описываемый (7.24)), уравнения оптимальной фильтрации принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\hat{b}}(t) &= -\alpha \hat{b}(t) - k_{\text{ФМ}} \kappa(t) z(t) U_0 \sin[\omega_0 t + k_{\text{ФМ}} \hat{b}(t) + \Phi_0]/N_0, \\ \dot{\kappa}(t) &= -2\alpha \kappa(t) + G_V/2 - \kappa^2(t) z(t) k_{\text{ФМ}}^2 \cos[\omega_0(t) + k_{\text{ФМ}} \hat{b}(t) + \Phi_0]/N_0. \end{aligned}$$

Нарисовать схемы аналоговых вычислителей с обратными связями, реализующие эти уравнения.

7.3.13. Показать, что стационарная дисперсия ошибки для задачи 7.3.12 при малом шуме в канале

$$\kappa = 2\alpha N_0 [(1 + G_V N_0 k_{\text{ФМ}}^2/N_0)^{0,5} - 1] U_0^{-1} k_{\text{ФМ}}^{-2}.$$

7.3.14. Показать, что максимальное отношение пиковой мощности сигнала к средней мощности шума  $r^2$  на выходе линейного фильтра с постоянными параметрами определяется соотношением  $r_{\text{макс}}^2 = \rho_{\text{вх}} 2FT$  при воздействии на его вход сигнала  $s(t)$  известной формы с длительностью  $T$  и полосой  $F$  и аддитивного белого шума и обеспечивается согласованным фильтром. Здесь  $\rho_{\text{вх}}$  — отношение средних мощностей сигнала и шума на входе фильтра в полосе сигнала.

7.3.15. Прямоугольный видеоимпульс  $s(t)$  длительности  $\tau_n$  имеет случайную амплитуду  $a$  и случайное положение во времени  $\Delta$  в тактовом интервале  $(0, T)$  (рис. 7.5,а), т. е. соответствует сигналу АИМ или ФИМ. Сигнал  $s(t)$  принимается на фоне белого шума

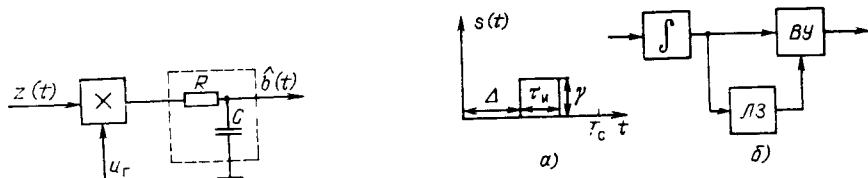


Рис. 7.4. Схема синхронного приемника

$N(t)$  с интенсивностью  $N_0$  так, что анализируемое колебание  $z(t) = s(t) + n(t)$ .

Показать, что а) согласованный с сигналом  $s(t)$  фильтр (СФ) может быть реализован посредством линейной схемы, содержащей три блока: интегратор, линию задержки на время  $\tau_n$  и вычитающее устройство (рис. 7.5,б); б) оптимальная по критерию максимального правдоподобия оценка амплитуды сигнала  $\hat{a}$  может быть получена по максимуму сигнала на выходе СФ независимо от значения  $\Delta \geq 0$ ,  $\Delta \leq T - \tau_n$ ; в) оптимальная оценка положения фронта импульса может быть получена по моменту времени достижения максимума сигнала на выходе СФ независимо от значения амплитуды; г) отношение пикового значения сигнала к средней мощности шума на выходе СФ  $r^2 = 2\alpha^2 \tau_n/N_0$ .

7.3.16. Показать, что фильтр согласованный с радиоимпульсом, имеющим прямоугольную огибающую, частоту заполнения  $f_0 = \omega_0/2\pi$  и длительность  $\tau_n$  при  $t_0 = \tau_n$  и  $\omega_0 \tau_n/2\pi = n$  ( $n$  — целое число), имеет комплексный коэффициент передачи

$$K(j2\pi f) = a [1 - \exp(-j\omega\tau_0)]/j(\omega - \omega_0).$$

Как можно реализовать такой фильтр?

7.3.17. Найти отношение пиковой мощности сигнала к средней мощности шума на выходе идеального полосового фильтра с полосой  $\Delta f = f_2 - f_1$ ,  $f_1$  и  $f_2$  — граничные частоты полосы (рис. 7.6,а), на вход которого поступают прямоугольный радиоимпульс с амплитудой  $U_m$ , длительностью  $\tau_n$  и частотой заполнения  $f_0 = (f_2 + f_1)/2$  (рис. 7.6,б) и гауссовский белый шум с равномерной спектральной плотностью, и показать, что оно меньше, чем на выходе согласованного фильтра, если  $\Delta f \tau_n > 1$ .

7.3.18. Определить полосу пропускания идеального полосового фильтра (см. задачу 7.3.17), при которой достигается максимум отношения пиковой мощности сигнала к средней мощности шума. Показать, что выигрыш в отношении сигнал-шум, который обеспечивает фильтр, согласованный с прямоугольным радиоимпульсом, по сравнению с квазиоптимальным идеальным полосовым фильтром равен при приеме одиночных импульсов всего лишь 0,86 дБ.

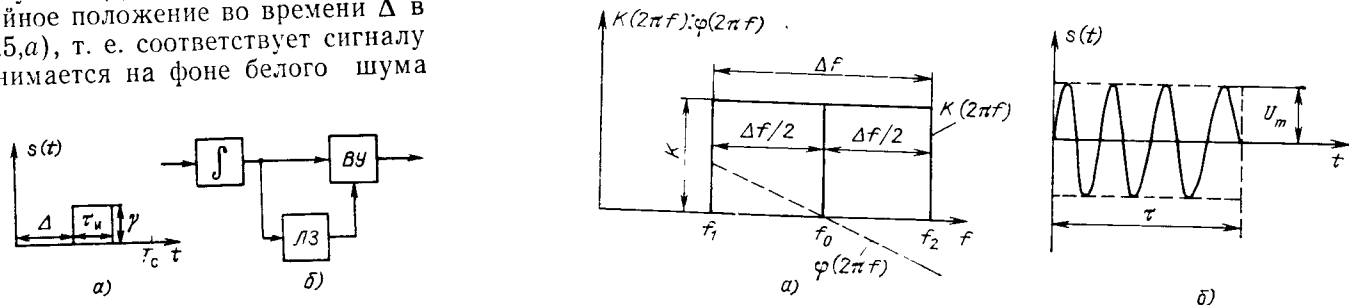


Рис. 7.5. Прямоугольный импульс (а) и согласованный с ним фильтр (б)

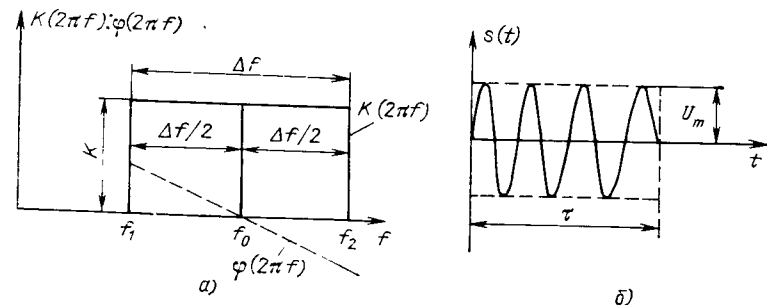


Рис. 7.6. Частотная характеристика идеального полосового фильтра (а) и прямоугольный радиоимпульс (б)

## 8.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ КАЧЕСТВА ПЕРЕДАЧИ НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ В СИСТЕМАХ С ИМПУЛЬСНО-КОДОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Для передачи непрерывных сообщений можно воспользоваться дискретным каналом. При этом необходимо преобразовать непрерывное сообщение в цифровой сигнал, т. е. в последовательность символов, сохранив содержащуюся в сообщении существенную часть информации, определяемую его энтропией. Типичным примером цифровых систем передачи непрерывных сообщений является система с импульсно-кодовой модуляцией (ИКМ).

Для преобразования непрерывного сообщения в цифровую форму используются операции квантизации и квантования. Полученная таким образом последовательность квантованных отсчетов кодируется и передается по дискретному каналу, как всякое дискретное сообщение. На приемной стороне непрерывное сообщение после декодирования восстанавливается (с той или иной точностью).

Основное техническое преимущество цифровых систем передачи перед непрерывными состоит в их высокой помехоустойчивости. Это преимущество наиболее сильно проявляется в системах передачи с многократной ретрансляцией (переприемом) сигналов. Типичные системы этого класса — кабельные и радиорелейные линии большой протяженности.

Если система состоит из  $k$  одинаковых звеньев, для обеспечения заданной верности связи необходимо обеспечить на входе каждого ретранслятора отношение сигнал-помеха в  $k$  раз больше, чем при передаче без ретрансляций. В реальных системах число ретрансляций  $k$  может достигать нескольких десятков, а иногда и сотен. В этих случаях накопление помех вдоль тракта передачи становится основным фактором, ограничивающим протяженность линии связи.

В цифровых системах передачи для ослабления эффекта накопления помех при передаче с ретрансляциями наряду с усилением применяют регенерацию импульсов, т. е. демодуляцию с восстановлением переданных кодовых символов и повторную модуляцию на переприемном пункте.

Ошибочно принятые в одном регенераторе символы передаются и на следующие регенераторы, так что ошибки все же накапливаются. При использовании  $k$  регенераторов и допустимой вероятности ошибки  $p \ll 1$  необходимо в демодуляторе каждого регенератора обеспечить вероятность ошибки

$$p_1 \leq p/k. \quad (8.1)$$

При цифровой передаче непрерывных сообщений можно, кроме того, повысить верность применением помехоустойчивого кодирования. Высокая помехоустойчивость цифровых систем передачи позволяет осуществить практически неограниченную по дальности связь при использовании каналов сравнительно невысокого качества.

Другим существенным преимуществом цифровых систем передачи информации является широкое использование в аппаратуре преобразования сигналов современной элементной базы цифровой вычислительной техники и микропроцессоров. Совокупность устройств, выполняющих преобразования входных цифровых сигналов в выходные цифровые сигналы на основе заданного алгоритма цифрового преобразования, называют цифровыми фильтрами. По существу, цифровой фильтр является специализированной ЭВМ или микропроцессором.

Важнейшими элементами системы цифровой передачи непрерывных сообщений являются аналого-цифровой преобразователь (АЦП), осуществляющий преобразование непрерывного сообщения в цифровую форму на передающей стороне, и устройство преобразования цифрового сигнала в непрерывный — цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) на приемной стороне.

Преобразование аналог — цифра состоит из трех операций: сначала непрерывное сообщение подвергается дискретизации по времени через интервалы  $\Delta t$ ; полученные отсчеты мгновенных значений  $b(\Delta t)$  квантуются; наконец, полученная последовательность квантованных значений  $b_{кв}(\Delta t)$  передаваемого сообщения представляется посредством кодирования в виде последовательности  $m$ -ичных кодовых комбинаций. Такое преобразование называется импульсно-кодовой модуляцией. Чаще всего кодирование здесь сводится к записи номера уровня в двоичной системе счисления.

Полученный с выхода АЦП сигнал ИКМ поступает или непосредственно в линию связи, или на вход передатчика (модулятора), где последовательность двоичных импульсов преобразуется в радиоимпульсы.

На приемной стороне линии связи последовательность импульсов после демодуляции и регенерации в приемнике поступает на ЦАП, назначение которого состоит в обратном преобразовании (восстановлении) непрерывного сообщения по принятой последовательности кодовых комбинаций. В состав ЦАП входят декодирующее устройство, предназначенное для преобразования кодовых комбинаций в квантованную последовательность отсчетов, и сглаживающий фильтр, восстанавливающий непрерывное сообщение по квантованным значениям

Преобразование непрерывных сообщений в цифровую форму в системах ИКМ сопровождается округлением мгновенных значений до ближайших разрешенных уровней квантования. Возникающая при этом погрешность представления является неустранимой, но контролируемой, так как не превышает половины шага квантования (рис. 8.1). Выбрав достаточно малый шаг квантования, можно обеспечить эквивалентность по заданному  $\epsilon$ -критерию исходного и квантованного сообщений. Погрешность (ошибку) квантования, представляющую собой разность между исходным сообщением и сообщением, восстановленным по квантованным отсчетам, называют шумом квантования.

В системах ИКМ отличие принятого сообщения от переданного обус-

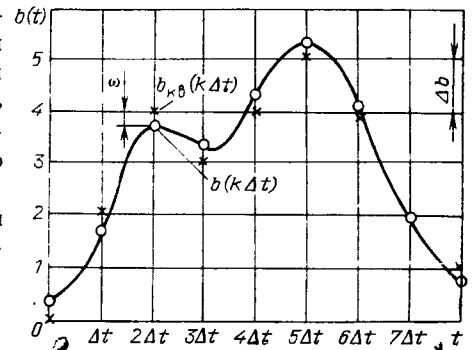


Рис. 8.1. К пояснению возникновения ошибки квантования

ловлено наличием шума квантования и шума ложных импульсов, порождаемого ошибками декодирования.

Можно показать, что при равномерном распределении шума квантование на интервале между двумя соседними разрешенными уровнями, средняя мощность шума квантования

$$\overline{\varepsilon^2} = (\Delta b)^2/12, \quad (8.2)$$

где  $\Delta b$  — шаг квантования.

Если положить, что сообщение  $B(t)$  нормировано, т. е.  $|B(t)|_{\max} \leq 1$ , то отношение средних мощностей сообщения и шума квантования

$$P_B/P_\varepsilon = \overline{B^2(t)}/\overline{\varepsilon^2(t)} = 12/[\Pi^2(\Delta b)^2], \quad (8.3)$$

где  $\Pi$  — пик-фактор сообщения.

Шаг квантования  $\Delta b$  можно выразить либо через число уровней квантования  $L$ , либо через число символов двоичного безызбыточного кода  $n$  на один отсчет сообщения:

$$\Delta b = 2(L-1) = 2/(2^n-1). \quad (8.4)$$

В этом случае

$$P_B/P_\varepsilon = 3(L-1)^2/\Pi^2 = 3(2^n-1)^2/\Pi^2. \quad (8.5)$$

Определим теперь среднюю мощность шума ложных импульсов. Если вероятность ошибочного приема одного кодового символа  $p$ , то для канала без памяти вероятность ошибочного декодирования  $n$ -разрядной кодовой комбинации  $p_n = [1 - (1-p)^n] \approx np$  при  $np \ll 1$ . При декодировании каждый символ кодовой комбинации, в зависимости от занимаемого им места, дает определенный «вклад» в декодируемое сообщение. Если используется двоичный код, то ошибка в младшем разряде кодовой комбинации вызывает погрешность в выходном сообщении, равную шагу квантования  $\Delta b$ ; ошибка во втором символе приводит к появлению в выходном сообщении погрешности  $2\Delta b$  и т. д. При этом средняя мощность шума, обусловленного действием ложных импульсов,

$$\overline{\varepsilon_{л.и}^2} = [1 - (1-p)^n] \frac{(\Delta b)^2}{n} \sum_{i=1}^n 2^{(i-1)} \approx p(\Delta b)^2 \sum_{i=1}^n 2^{(i-1)}. \quad (8.6)$$

При фиксированном значении  $n = \log L$  шум ложных импульсов зависит только от вероятности ошибок  $p$ , которая, в свою очередь, определяется отношением мощностей сигнала и помехи в канале и видом модуляции.

Шум квантования и шум ложных импульсов в системах ИКМ можно считать независимыми. Поэтому суммарный шум на выходе системы ИКМ имеет среднюю мощность

$$\overline{\varepsilon_\Sigma^2} = \overline{\varepsilon^2} + \overline{\varepsilon_{л.и}^2}. \quad (8.7)$$

## Задачи

8.1.1. Двоичные символы цифрового сигнала передаются по гауссовскому каналу с помощью частотной модуляции. Какую величину  $h^2$  необходимо обеспечить при оптимальном некогерентном

приеме, если допустима вероятность ошибки в элементарном символе  $p = 10^{-5}$ , а в системе использовано  $k$  регенераторов? Принять  $k = 1; 10; 100; 1000$ .

8.1.2. Двоичные символы цифрового сигнала передаются по гауссовскому каналу, используя относительную фазовую модуляцию. Какую величину  $h^2$  необходимо обеспечить при оптимальном некогерентном приеме с использованием  $k$  регенераторов, если допустимая вероятность ошибки  $p = 10^{-6}$ , а  $k = 1; 10; 100; 1000$ ?

8.1.3. Какую величину  $h^2$  необходимо обеспечить в гауссовском канале, по которому двоичные символы цифрового сигнала передаются, используя фазовую модуляцию, если допустимая вероятность ошибки в элементарном символе  $p = 10^{-5}$ ? Считать, что осуществляется оптимальный когерентный прием с использованием  $k = 1; 10; 100; 1000$  ретрансляторов.

8.1.4. В системе ИКМ передается сообщение, имеющее равномерное распределение мгновенных значений  $w(b) = 1/2$  и пик-фактор  $\Pi = \sqrt{3}$ . Определить отношение средних мощностей сообщения и шума квантования  $P_B/P_\varepsilon$ , если число уровней квантования  $L = 128$ .

8.1.5. Определить отношение средних мощностей сообщения и шума квантования в системе ИКМ, если сообщение имеет равномерную плотность вероятности  $w(b) = 1/2$ , пик-фактор  $\Pi = 3$ , а число разрядов кода  $n = 8$ .

8.1.6. Построить зависимость относительной мощности шума квантования  $P_\varepsilon/P_B$  от числа уровней квантования  $L$  в системе ИКМ при передаче сообщения с параметрами, заданными в задаче 8.1.4. Как меняется относительная мощность шума квантования с увеличением числа уровней квантования в два раза?

8.1.7. Построить зависимость относительной мощности шума квантования  $P_\varepsilon/P_B$  от числа разрядов кода  $n$  в системе ИКМ при передаче сообщения с параметрами, заданными в задаче 8.1.4. Как меняется относительная мощность шума квантования при увеличении числа разрядов кода на единицу?

8.1.8. Определить мощность шума ложных импульсов  $\overline{\varepsilon_{л.и}^2}$  в системе ИКМ, если число разрядов кода  $n = 7$ , а вероятность ошибочного приема одного разряда  $p = 10^{-5}; 10^{-6}; 10^{-7}$ .

8.1.9. Построить зависимость мощности шума ложных импульсов от числа уровней квантования  $L$  при значении вероятности ошибочного приема одиночного разряда  $p = 10^{-5}; 10^{-6}; 10^{-7}$ .

8.1.10. Определить суммарную мощность шума квантования и шума ложных импульсов  $P_\Sigma$  в системе ИКМ при вероятности ошибки в одном разряде  $p = 10^{-5}$  и числе разрядов кода  $n = 7$ . Найти отношение средних мощностей сообщения и суммарного шума  $P_B/P_\Sigma$ , если пик-фактор сообщения  $\Pi = \sqrt{3}$ ,  $p = 10^{-5}; 10^{-6}; 10^{-7}$ .

8.1.11. Построить зависимость  $P_B/P_\Sigma$  от числа разрядов кода (уровней квантования), если пик-фактор сообщения  $\Pi = \sqrt{3}$ ,  $p = 10^{-5}; 10^{-6}; 10^{-7}$ .

8.1.12. Определить минимально необходимую полосу частот сигнала ИКМ при основании кода  $m$  и полосе сообщения  $F_c$ . Чему равна полоса частот сигнала ИКМ при  $m=2$ ,  $F_c=3,1$  кГц?

8.1.13. Построить зависимость полосы частот сигнала ИКМ от основания кода  $m$  при полосе сообщения  $F_c=3,1$  кГц.

8.1.14. Построить зависимость полосы сигнала ИКМ от числа уровней квантования, приняв основание кода  $m=2$  и полосу сообщений  $F_c=3,1$  кГц.

8.1.15. Передача сигналов ИКМ по каналу связи осуществляется с помощью двухполосной частотной модуляции (система ИКМ—ЧМ). Какое отношение сигнал-шум в канале необходимо обеспечить, чтобы при неоптимальном некогерентном приеме ( $p=\exp(-\rho_{вх}/2)/2$ ) можно было пренебречь ошибками в канале. Передача ведется с  $k$  ретрансляциями.

8.1.16. Определить выигрыш  $g$  и обобщенный выигрыш  $g'$  в системе ИКМ—ЧМ, если число разрядов кода  $n=7$ , пик-фактор сообщения  $\Pi=3$ , число ретрансляций  $k=1$ , полоса сообщения  $F_c=3$  кГц.

8.1.17. Определить выигрыш  $g$  и обобщенный выигрыш  $g'$  в системе ИКМ—ЧМ в условиях задачи 8.1.15, приняв число ретрансляций  $k=10$ . Как изменяются  $g$  и  $g'$  по сравнению со случаем передачи без ретрансляций?

## Глава 9. ТЕОРИЯ МНОГОКАНАЛЬНОЙ ПЕРЕДАЧИ СООБЩЕНИЙ

### 9.1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАЗДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

На рис. 9.1 приведена структурная схема, иллюстрирующая принцип построения систем многоканальной передачи сообщений. Сообщения  $a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)$  в модуляторах  $M_1, M_2, \dots, M_N$  преобразуются в каналные сигналы  $s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)$ .

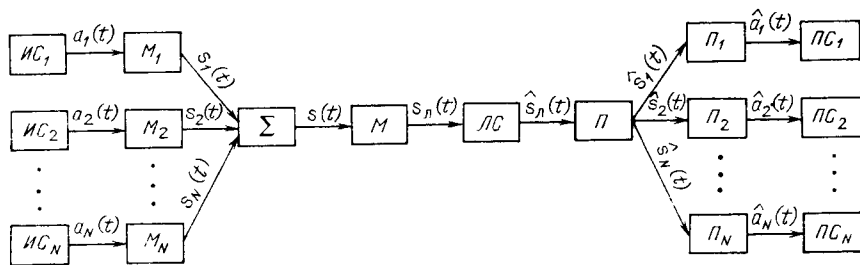


Рис. 9.1. Структурная схема многоканальной системы связи

Сигнал  $k$ -го канала  $s_k(t) = C_k \psi_k(t)$ , где  $\psi_k(t)$  — функция переносчика;  $C_k$  — некоторый коэффициент, отображающий передаваемое сообщение: при непрерывном сообщении он представляет собой мгновенное значение функции сообщения, при дискретном сообщении — некоторое число, соответствующее передаваемому символу.

В сумматоре  $\Sigma$  из совокупности канальных сигналов формируется групповой сигнал  $s(t)$ , который затем в групповом модуляторе  $M$  преобразуется в линейный сигнал  $s_N(t)$ . Этот сигнал поступает в линию связи ЛС. На приемном конце линии связи линейный сигнал  $\hat{s}_N(t)$  в групповом приемнике  $\Pi$  преобразуется в групповой сигнал

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=1}^N \hat{s}_k(t) = \sum_{k=1}^N C_k \psi_k(t). \quad (9.1)$$

Из группового сигнала индивидуальные приемники  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_N$  выделяют канальные сигналы  $\hat{s}_1(t), \hat{s}_2(t), \dots, \hat{s}_N(t)$  и из этих сигналов формируют сообщения  $\hat{a}_1(t), \hat{a}_2(t), \dots, \hat{a}_N(t)$ .

При отсутствии искажений и аддитивных шумов в канале однозначное выделение канальных сигналов из группового сигнала (9.1) возможно лишь при линейной независимости функций ансамбля  $\{s_k(t)\}$ . Необходимым и достаточным условием этого является отличие от нуля определителя Грама:

$$D = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \rho_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (9.2)$$

$$\text{где } \rho_{kl} = \frac{1}{T} \int_0^T s_k(t) s_l(t) dt.$$

Следует заметить, что при выполнении условия (9.2) групповой сигнал (9.1) тождественно равен нулю только при нулевых значениях всех  $C_k$ .

Процедура выделения канальных сигналов из группового в месте приема сводится к определению проекций вектора  $s$  на соответствующие координатные оси. Эту операцию можно осуществить корреляционной обработкой:

$$L(s) = (s\eta) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \eta_k(t) dt = C_k, \quad (9.3)$$

где  $\{\eta_k(t)\}$  — система весовых функций (опорных сигналов), удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{T} \int_0^T s_k(t) \eta_l(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq k, \\ \neq 0 & \text{при } l = k. \end{cases} \quad (9.4)$$

Для ортогонального ансамбля сигналов  $\{s_k(t)\}$  базисные функции  $\eta_k(t) = C_k s_k(t)$ , т. е. определяются тем же ансамблем. С учетом возможного взаимного запаздывания сигналов в канале условие разделения (9.4) можно записать для этих сигналов в виде

$$B_{k,l}(\tau) = \int_0^T s_k(t) \eta_l(t + \tau) dt = 0; \quad 0 \leq \tau \leq T, \quad k \neq l, \quad k, l = \overline{1, N}. \quad (9.5)$$

Выполнение условия (9.5) позволяет строить несинхронную систему уплотнения (систему со свободным доступом каждого абонента в канал). Если же система является синхронной (канальные сигналы имеют одинаковую длительность и начало отсчета), условие разделения (9.5) должно выполняться при  $\tau=0$ .

### Задачи

9.1.1. Можно ли построить многоканальную систему связи, если в качестве канальных сигналов использовать сигналы биортогональной системы  $\{s_k(t), -s_k(t)\}$ ,  $k=1, N$ ?

9.1.2. Можно ли построить многоканальную систему связи, если в качестве канальных сигналов использовать функции  $\{s_k(t)\}$ , ортогональные на интервале  $(0, T)$  при условии, что в составе системы  $\{s_k(t)\}$

- имеются функции с нулевой энергией;
- отсутствуют функции с нулевой энергией?

9.1.3. В двухканальной системе связи предполагается использовать канальные сигналы  $s_1(t) = a_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  и  $s_2(t) = a_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi)$ , имеющие длительность  $T \gg 2\pi/\omega_0$ .

Найти величину  $\Delta\varphi$ , при которой можно при отсутствии аддитивных шумов в канале осуществить однозначное выделение выбранных канальных сигналов из группового сигнала:

$$\hat{s}(t) = ks(t) = k[a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)].$$

9.1.4. Найти опорные сигналы (базисные функции) на приеме  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$ , позволяющие осуществить разделение группового сигнала  $\hat{s}(t) = k[a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)]$  двухканальной системы связи, в которой использованы канальные сигналы  $s_1(t) = a_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  и  $s_2(t) = a_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi)$ , имеющие длительность  $T \gg 2\pi/\omega_0$ .

9.1.5. Выяснить, возможно ли однозначное разделение каналов в трехканальной системе связи при отсутствии в канале искажений и аддитивных шумов, если в качестве канальных переносчиков использованы сигналы  $s_1(t) = a_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ ;  $s_2(t) = a_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi_1)$ ;  $s_3(t) = a_3 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi_2)$ , имеющие одинаковую длительность  $T \gg 2\pi/\omega_0$ .

9.1.6. Показать, что при гауссовском аддитивном стационарном флуктуационном шуме в канале  $N(t)$  и ортогональном ансамбле канальных сигналов  $\{s_k(t)\}$ , известных точно в месте приема и используемых для передачи равновероятных дискретных сообщений, алгоритм разделения (9.3) можно назвать оптимальным по критерию минимума средней вероятности ошибки.

9.1.7. Найти отношение сигнал-шум на выходе индивидуального канала многоканальной системы, в которой использован ортогональный ансамбль канальных сигналов  $\{s_k(t)\}$ , имеющих одинаковые энергии, полагая, что в канале действует гауссовский аддитивный стационарный флуктуационный шум и использован алгоритм разделения (9.3).

9.1.8. В многоканальной системе связи в качестве переносчиков выбраны сигналы, последовательность которых образует степенной ряд:  $\psi_1(t) = 1$ ,  $\psi_2(t) = t$ ,  $\psi_3(t) = t^2$ , ... ( $0 \leq t \leq T$ ). Записать групповой сигнал  $s(t)$ , полагая что информация содержится в коэффициентах  $C_1, C_2, \dots, C_N$ .

9.1.9. Групповой сигнал двухканальной системы связи имеет вид  $s = s_1 + s_2 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot t$ . В приемном устройстве использованы весовые функции вида  $\eta_1(t) = \frac{4}{T} \psi_1(t) - \frac{6}{T} \psi_2(t)$ ,  $\eta_2(t) = -\frac{6}{T} \psi_1(t) + \frac{12}{T} \psi_2(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ).

Найти обобщение на выходе индивидуального приемника каждого канала.

## 9.2. СПОСОБЫ РАЗДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

**Частотное разделение.** При таком способе разделения сигналы индивидуальных каналов можно записать в виде

$$s_k(t) = A_k(t) \cos[\omega_k t + \theta_k(t)], \quad (9.6)$$

причем информация закладывается в изменения огибающей  $A_k(t)$ , фазы  $\theta_k(t)$  или одновременно в изменении обоих этих параметров. Здесь  $\omega_k$  — средняя частота в спектре канального сигнала. Эти частоты выбираются так, чтобы индивидуальные сигналы практически не перекрывались по спектру.

**Временное разделение.** При таком способе разделения элементы канальных сигналов передаются и принимаются последовательно во времени в общей полосе частот, что обеспечивается импульсным модулятором и синхронно работающими на передаче и приеме устройствами коммутации. Интервал следования элементов индивидуального сигнала  $T_k$  чаще всего выбирается равным  $1/(2F_c)$ , а частота импульсного генератора, осуществляющего дискретизацию во времени сигналов индивидуальных источников,  $F_r = 2F_c n$ ,  $n$  — число каналов. В системах временного разделения канальные сигналы передаются по каналу последовательно. Такие системы иногда называют последовательными.

**Разделение по фазе.** При этом способе разделения в качестве индивидуальных сигналов на интервале  $T$  выбирают сигналы с неизменной мгновенной частотой:

$$s_k(t) = A_k(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_k). \quad (9.7)$$

Коэффициенты  $A_k(t)$  зависят от передаваемой информации, а по различию фаз  $\varphi_k$  осуществляется разделение. Систему разделения по фазе делают двухканальной, так как только при  $n=2$  сигналы (9.7) остаются линейно независимыми при любой разности фаз  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k\pi$  (см. задачу 9.1.5).

**Разделение по форме.** При таком способе разделения в качестве индивидуальных сигналов используются сигналы различной формы, удовлетворяющие условиям разделения и использующие общие полосы частот и интервалы времени. Как правило, это ансамбль ортогональных сигналов на интервале  $(0, T)$ . В качестве канальных сигналов при разделении по форме часто используют последовательные составные сигналы. В этом случае канальный сигнал длительностью  $T$  формируется из последовательности  $N = T/\tau_n$  отрезков синусоидаль-

ных колебаний длительностью  $\tau_n$  (элементарные сигналы), которые могут различаться частотами, фазами и амплитудами. Когда элементарные сигналы различаются по частоте, то говорят, что последовательный составной сигнал кодируется в виде частотно-временной матрицы (ЧВМ). В качестве канальных сигналов, разделяемых по форме, можно использовать и реализации шумового процесса.

В связи с развитием цифровых методов разделения сигналов по форме в качестве переносчиков индивидуальных сообщений используются дискретные ортогональные последовательности, такие, как функции Радемахера, Уолша и др.

Функции Радемахера образуются из синусоидальных функций с помощью соотношения  $r_k(\theta) = \text{sign}[\sin(2^k \pi \theta)]$ ,  $0 \leq \theta < 1$ , где  $\theta = t/T$  — безразмерное время;  $T$  — период функции;  $k = 0, 1, 2, \dots$  — порядок функции.

Функции Уолша  $\{\text{wal}(m, \theta)\}$  образуются следующим образом. По определению вводится функция  $\text{wal}(0, \theta) = 1$  при  $m = 0$ . При  $m \geq 1$  необходимо разложить  $m$  по модулю 2, т.е. представить суммой  $m = 2^{\mu_1} + 2^{\mu_2} + \dots + 2^{\mu_p}$ , где  $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p$  — положительные целые числа. Функция Уолша

$$\text{wal}(m, \theta) = r_{\mu_1+1}(\theta) r_{\mu_2+1}(\theta) \dots r_{\mu_p+1}(\theta).$$

**Комбинационное разделение.** При таком способе, используемом для передачи дискретных сообщений, одно значение модулируемого параметра группового сигнала ставится в соответствие группе символов, выдаваемых индивидуальными источниками. Широко распространены системы комбинационного разделения двух двоичных источников: система двукратной частотной модуляции ДЧМ, система двукратной фазовой (относительной фазовой) модуляции —ДФМ (ДОФМ). Эти системы являются четырехпозиционными.

## Задачи

9.2.1. Усредненный энергетический спектр канального сигнала при частотном разделении определяется выражением

$$G_k(f) = A \exp[-\beta^2 (\omega - \omega_k)^2]$$

(гармоническая несущая, модулированная по частоте или фазе гауссовским стационарным процессом).

Найти необходимый минимальный разнос между средними частотами двух соседних каналов  $\Delta f = 2F_1$ , полагая, что в полосе  $f_k \pm F_1$  сосредоточено 95% мощности индивидуального сигнала. Найти отношение сигнал-переходная помеха на выходе разделительного полосового фильтра, считая, что его частотная характеристика (коэффициент передачи мощности) имеет форму трапеции (рис. 9.2), причем в полосе  $f_k + F_2$  сосредоточено 90% мощности канального сигнала. Коэффициент передачи фильтра по мощности в пределах  $f_k \pm F_2$  считать равным 1, а на частотах  $f_k \pm F_1$  — равным 0,1. Принять  $\beta = 1,23 \cdot 10^{-4}$  с,  $A = 5 \cdot 10^{-4}$  Вт/Гц.

9.2.2. Показать, что система с частотным разделением использует сигналы, удовлетворяющие условию (9.5), и, следовательно, может работать в асинхронном режиме.

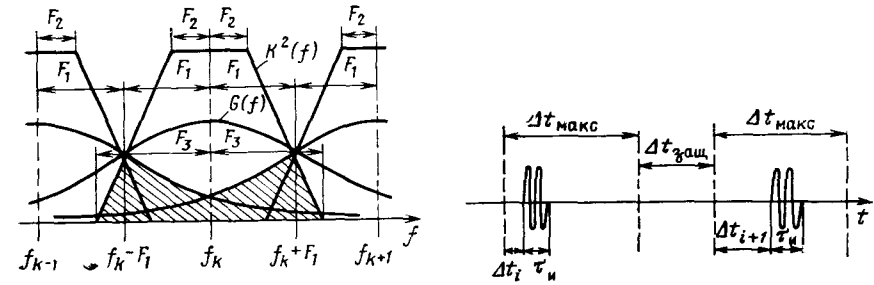


Рис. 9.2. К определению переходной помехи и разнесения между канальными частотами многоканальной системы при трапецидальных частотных характеристиках разделительных фильтров

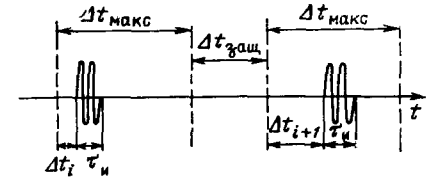


Рис. 9.3. Реализация сигнала многоканальной системы связи с ФИМ

9.2.3. Определить необходимую полосу  $\Delta f_c$  для передачи десяти независимых речевых сообщений (полоса каждого 0,3 ... 3,4 кГц) с помощью однопольной модуляции на поднесущих и амплитудной модуляции общей несущей (система ОМ—АМ) по линии связи с частотным разделением. Считать, что для уменьшения переходных помех между каналами разнос между поднесущими частотами каналов  $\Delta f_k$  возрастает (по сравнению с минимально необходимой величиной) на величину защитного интервала  $\Delta f_{заш}$ , составляющего 30% от  $\Delta f_k$ .

9.2.4. Решить задачу 9.2.3 для случая фазовой модуляции общей несущей. Индекс фазовой модуляции  $\beta_{ФМ} = 6$ .

9.2.5. В системе с временным разделением передаются независимые речевые сообщения (полоса каждого 0,3 ... 3,4 кГц) с первичной фазоимпульсной модуляцией и вторичной амплитудной модуляцией общей несущей (система ФИМ—АМ). Полагая, что линейный сигнал занимает полосу 21,5 МГц, определить число каналов  $n$ . Считать, что для уменьшения переходных помех оставляются защитные промежутки  $\Delta t_{заш}$  между тактовыми интервалами отдельных каналов, составляющие 2% от интервала дискретизации первичного сигнала во времени (рис. 9.3), а максимальное время отклонения фронта импульса в тактовом интервале  $\Delta t_{макс} = 128 \tau_n$  ( $\tau_n$  — длительность элементарной посылки). Во сколько раз увеличится число каналов при том же отношении  $\Delta t_{макс}/\tau_n$ , если вследствие мер, принятых для компенсации переходного процесса в канале, можно будет отказаться от защитных промежутков между тактовыми интервалами?

9.2.6. Определить необходимую полосу частот  $\Delta f_c$  для передачи 20 независимых речевых сообщений (полоса каждого 0,3 ... 3,4 кГц) с помощью системы ФИМ—АМ (см. задачу 9.2.5).

9.2.7. Решить задачу 9.2.6 для системы ФИМ—ЧМ, полагая, что  $\beta_{ЧМ} = 10$ .

9.2.8. Групповой сигнал двухканальной системы фазового разделения имеет вид

$$s(t) = \dot{X}_1(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + X_2(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $\dot{X}_1(t)$  и  $\dot{X}_2(t)$  — независимые стационарные модулирующие процессы с одинаковыми дисперсиями. Прием осуществляется двухканальной схемой (рис. 9.4), где опорные сигналы  $\eta_1(t) = 2 \cos(\omega_0 t + \psi)$ ,  $\eta_2(t) = 2 \sin(\omega_0 t + \psi)$ , а фильтры нижних частот предполагаются идентичными и неискажающими для модулирующих процессов  $\dot{X}_1(t)$  и  $\dot{X}_2(t)$ .

Найти отношение средней мощности переходной помехи (обусловленной фазовой расстройкой  $\Delta = \psi - \varphi_0$ ) к средней мощности сигнала в отдельном канале и определить расстройку, при которой это отношение не превышает 0,1.

9.2.9. Система связи с ФМ, использующая сигналы вида  $s_k(t) = A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$ , может быть использована для передачи по каналу с полосой 3,1 кГц сообщений от 20 дискретных источников, работающих синхронно со скоростью 120 бод ( $T_c = 8,333$  мс). Нарисовать амплитудные спектры канальных сигналов, убедиться в том, что они существенно перекрываются, и определить интервал анализа по алгоритму (9.3), на котором обеспечивается ортогональность канальных сигналов. Разнос  $\Delta f = 142$  Гц.

9.2.10. Канальные сигналы длительностью  $T$  асинхронно-адресной системы связи образованы одночастотными последовательными сигналами  $s_k(t) = X_k(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ , где  $X_k(t)$  — двоичная дуполярная синхронная последовательность, содержащая  $N = T/\tau + 1$  посылок длительностью  $\tau$ .

Показать, что условия разделения этих сигналов (9.5) при  $T \gg 2\pi/\omega_0$  и  $f_0 \gg 1/\tau_0$  сводятся к требованию

$$B_{k,l}(\tau) = \int_0^T x_k(t) x_l(t + \tau) dt = 0, \quad 0 \leq \tau \leq T,$$

т. е. взаимной ортогональности двоичных последовательностей, об-

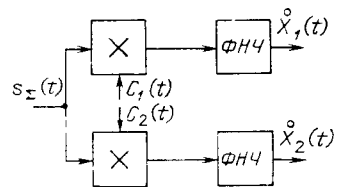


Рис. 9.4 Структурная схема приемного устройства двухканальной системы связи с фазовым разделением

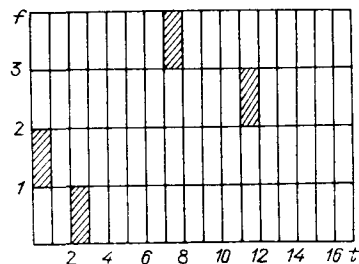


Рис. 9.5 Частотно-временная матрица

разующих «адреса» отдельных каналов, при произвольном взаимном сдвиге.

9.2.11. Канальные сигналы  $s_k(t)$  длительностью  $T = N\tau$  ( $N = 17$ ) асинхронно-адресной системы связи образованы на основе частотно-временной матрицы (рис. 9.5).

Нарисуйте форму сигнала, полагая, что радиоимпульсы имеют неизменную амплитуду  $h$ , и объясните, почему для его выделения из группового сигнала может быть использована схема (рис. 9.6), содержащая четыре полосовых фильтра ПФ, настроенных на соответствующие рабочие частоты  $f_1, f_2, f_3, f_4$ ; четыре амплитудных детектора Д, четыре линии задержки ЛЗ с 17 отводами, в каждой линии задействован лишь один отвод, соответствующий «адресу» данного канала (абонента); нелинейную схему совпадений СС, на выходе которой появляется импульс сигнала, несущий сообщение только при том условии, если задержанные входные импульсы во всех ветвях совпадают во времени.

9.2.12. Определите возможное число одновременно работающих каналов (число кодовых адресных комбинаций), которое можно образовать на основе ЧВМ, реализация которой показана на рис. 9.5. Незаштрихованные элементы ЧВМ соответствуют элементарным сигналам, не используемым в данной адресной комбинации (эти сигналы имеют нулевую амплитуду).

9.2.13. В отдельных каналах асинхронно-адресной системы с сигналами, заданными в предыдущей задаче, передаются речевые сообщения (полоса 0,3... 3,4 кГц). Первичная модуляция осуществляется по системе ФИМ, причем девиация фронта импульса  $\Delta t_{\max} = 128 \tau_n$ . Определить максимально возможную длительность посылки  $\tau_n$  и полосу канального сигнала, имея в виду, что вторичная модуляция — АМ.

9.2.14. Решить задачу 9.2.13 в предположении, что вторичная модуляция — ФМ,  $\beta_{\text{ФМ}} = 10$ .

9.2.15. Решить задачу 9.2.13 для системы АИМ—АМ.

9.2.16. Построить графики первых шести функций Радемахера, используемых в многоканальной системе связи с цифровым разде-

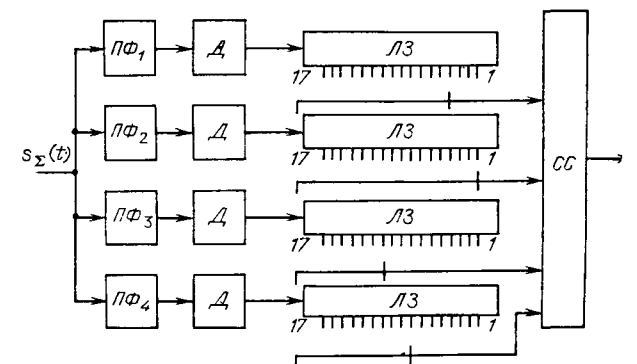


Рис. 9.6 Структурная схема приемного устройства асинхронно-адресной системы связи



лением по форме. Определить полосу частот, требуемую для передачи сообщений в этой системе, если  $T=20$  мс

9.2.17. Нарисовать графики функций Уолша, построенных по первым четырем функциям Радемахера, и найти полосу частот, необходимую для передачи сообщений в многоканальной системе цифрового разделения по форме, в которой эти функции использованы в качестве канальных переносчиков, если  $T=20$  мс.

9.2.18. В синхронной 4-позиционной системе комбинационного разделения групповые символы передаются посредством частотной модуляции синусоидальной несущей (система ДЧМ). Четырьмя мгновенными частотами  $f_1, f_2, f_3$  и  $f_4$  передаются значения двоичных символов двух источников согласно табл. 9.1.

Таблица 9.1

Символ 1-го источника	1	1	0	0
Символ 2-го источника	1	0	1	0
Рабочая частота	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$

Полагая, что параметры сигналов в месте приема известны с точностью до фазы, а в непрерывном канале действует гауссовский белый шум, определить вероятность ошибки в каждом двоичном канале при оптимальном приеме (символы 0 и 1 передаются от источников с равными вероятностями).

9.2.19. В синхронной 4-позиционной системе комбинационного разделения групповые символы передаются посредством фазовой модуляции синусоидальной несущей (система ДФМ). Четырьмя значениями фазы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и  $\varphi_4$  передаются значения двоичных символов двух источников согласно табл. 9.2.

Полагая, что параметры сигнала известны точно в месте приема, а в канале действует гауссовский белый шум, определить вероятность ошибки в каждом двоичном канале при оптимальном приеме и равной вероятности передачи символов 0 и 1.

Как изменится вероятность ошибки, если перейти от абсолютной к относительной фазовой модуляции (система ДОФМ)?

Таблица 9.2

Символ 1-го источника	1	1	0	0
Символ 2-го источника	1	0	1	0
Фаза сигнала ДФМ	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$

## Глава 10. МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ СООБЩЕНИЙ

### 10.1. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ СООБЩЕНИЙ

Для оценки эффективности систем передачи сообщений часто употребляется коэффициент использования канала по мощности  $\beta$  (энергетическая эффективность) и коэффициент использования канала по полосе частот  $\gamma$  (частотная эффективность)

$$\beta = R/\rho_0, \quad \gamma = R/F, \quad (10.1), (10.2)$$

где  $R$  — скорость передачи информации,  $\rho_0$  — отношение мощности сигнала  $P_c$  к спектральной плотности мощности шума  $N_0$ ;  $F$  — полоса частот, занимаемая сигналом. Коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  имеют смысл удельной скорости передачи информации

Обобщенной характеристикой эффективности систем передачи сообщений является коэффициент использования канала по пропускной способности (информационная эффективность)

$$\eta = R/C \quad (10.3)$$

Если учесть формулу Шеннона для пропускной способности гауссовского канала  $C = F \log(\rho + 1)$ , где  $\rho = P_c/P_{ш}$ , то

$$\eta = \gamma [\log(\gamma/\beta + 1)], \quad \gamma = \rho\beta. \quad (10.4)$$

Если положить  $\eta = 1$ , что соответствует теореме Шеннона о кодировании для каналов с шумами, то получается предельная зависимость между  $\beta$  и  $\gamma$ :

$$\beta = \gamma / (2^\gamma - 1) \quad (10.5)$$

Эта зависимость отражает наилучший обмен между  $\beta$  и  $\gamma$  в непрерывном канале. Если фиксировать вероятность ошибки  $p = \text{const}$ , то, определив зависимость  $\beta = f(\gamma)$ , можно сравнительно быстро найти системы, удовлетворяющие заданным требованиям по энергетической и частотной эффективности, а также выяснить, насколько эти показатели для реальных систем близки к предельным. Кривые предельной энергетической и

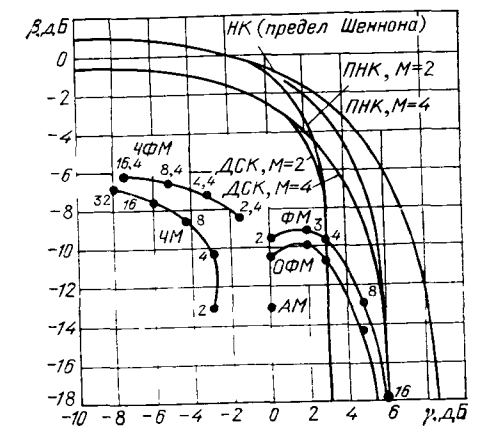


Рис. 10.1 Кривые предельной энергетической и частотной эффективности систем передачи информации

частотной эффективности систем передачи сообщений для дискретных симметричных каналов (ДСК) и полунепрерывных каналов (ПНК) при основании  $M=2$  и  $4$  приведены на рис. 10.1. Здесь же приведены зависимости  $\beta(\gamma)$  для различных систем модуляции при  $\rho=10^{-5}$ . На этом рисунке линии одинаковых значений  $\rho$  представляют собой прямые под углом  $45^\circ$ .

Сравнительную эффективность систем передачи сообщений можно определять по энергетическому выигрышу перехода ЭВ от  $i$ -й системы к  $j$ -й при фиксированной вероятности ошибки  $p=\text{const}$  и скорости передачи  $R=\text{const}$ :

$$\text{ЭВ}_{i/j} = 10 \lg(\beta_i/\beta_j) = \Delta\beta_{i/j}. \quad (10.6)$$

Можно оценить выигрыш по частотной эффективности при переходе от  $i$ -й системы к  $j$ -й:

$$\Delta\gamma_{i/j} = 10 \lg(\gamma_j/\gamma_i) = 10 \lg(R_j F_i / R_i F_j). \quad (10.7)$$

Если  $R=\text{const}$ , то

$$\Delta\gamma_{i/j} = 10 \lg(F_i/F_j). \quad (10.8)$$

### Задачи

10.1.1. Определить наибольшее возможное значение энергетической эффективности  $\beta_{\text{макс}}$  при передаче сообщений в канале с аддитивным гауссовским белым шумом.

10.1.2. Найти предельно возможное значение частотной эффективности  $\gamma_{\text{макс}}$  при произвольном основании кода  $M$ .

10.1.3. Определить предельные частотную и энергетическую эффективности для двоичного канала ( $M=2$ ) с противоположными сигналами при  $2FT=1$ .

10.1.4. Как изменится частотная и энергетическая эффективность, если в предыдущей задаче принять  $M=4$ ?

10.1.5. Оценить выигрыш по частотной и энергетической эффективностям при переходе от 32-позиционной к 2-позиционной системе частотной модуляции при вероятности ошибки  $p=10^{-5}$ .

10.1.6. Сравнить по информационной эффективности  $\eta$  2-позиционные системы АМ, ФМ, ОФМ и ЧМ.

10.1.7. На сколько можно увеличить частотную и энергетическую эффективность, если осуществить переход от дискретного канала к каналу с непрерывным выходом при  $M=2$  и  $M=4$ .

10.1.8. Определить энергетический выигрыш  $\Delta\beta_{i/j}$  и выигрыш по полосе  $\Delta\gamma_{i/j}$  при переходе от двоичной системы АМ к двоичной системе ЧМ и ФМ при одинаковой вероятности ошибки в случае оптимального когерентного приема и фиксированной скорости передачи информации.

10.1.9. Найти эквивалентную вероятность ошибки для 10-позиционной системы ЧМ и ФМ в случае оптимального когерентного приема при  $h^2=12,8$ .

Определить выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки при переходе от системы ЧМ к системе ФМ.

10.1.10. Найти эквивалентную вероятность ошибки для случая некогерентного оптимального приема 5-позиционной ЧМ при  $h^2=16,5; 25; 32; 70; 100$ .

10.1.11. Найти энергетический выигрыш при переходе от 2-позиционной системы ЧМ к 5-позиционной системе ЧМ в канале с неопределенной фазой и флуктуационным шумом, полагая, что эквивалентная вероятность ошибки  $p_s=10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}; 10^{-5}$ . Скорость передачи информации неизменна.

10.1.12. Найти величину коэффициента использования пропускной способности канала для 4-позиционной системы ЧМ, обеспечивающей при неопределенной фазе и флуктуационном шуме эквивалентную вероятность ошибки  $p_s=10^{-4}$ , полагая, что скорость передачи информации  $R=300$  бит/с, а полоса частот системы  $F=3,1$  кГц.

10.1.13. Одним из способов повышения помехоустойчивости связи при наличии замираний является разнесенный прием, сущность которого заключается в том, что переданное сообщение воспроизводится по нескольким сигналам, несущим одну и ту же информацию. Оценить вероятность ошибки в системе  $n$ -кратного разнесения с автовыбором наиболее сильного сигнала (рис. 10.2) при использовании двоичной системы с активной паузой, ортогональной в усиленном смысле (ЧМ), при медленных рэлеевских замираниях в отдельных ветвях.

10.1.14. Найти энергетический выигрыш при переходе от одиночного к двукратному приему с автовыбором в канале с медленными рэлеевскими независимыми замираниями в отдельных ветвях при неизменной вероятности ошибки  $p_1=p_2=10^{-4}$ .

10.1.15. При проектировании передвижной приемопередающей радиостанции, которая должна обеспечить двустороннюю передачу двоичных символов, по экономическим соображениям, а также по допустимым габаритным размерам возможно 3 варианта:

а) передатчик мощностью 800 Вт, одиночный прием,  $\overline{h^2}_1=40$ ;

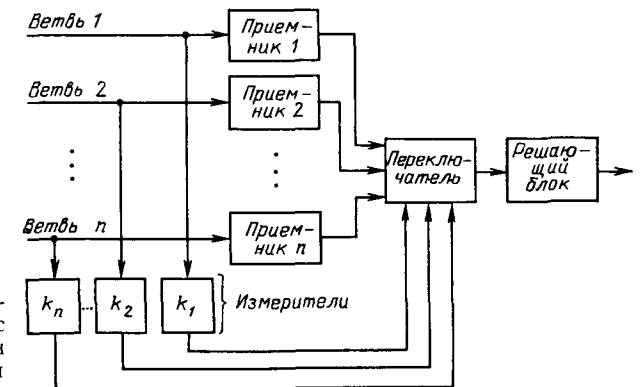


Рис. 10.2. Схема разнесенного приема с автовыбором ветви с наиболее сильным сигналом

б) передатчик мощностью 400 Вт, двоянный прием на разнесенные антенны,  $\overline{h^2_2}=20$ ;

в) передатчик мощностью 200 Вт, строенный прием на разнесенные антенны,  $\overline{h^2_3}=10$ .

При каком варианте вероятность удовлетворительной связи больше, если допустима вероятность ошибки  $10^{-4}$ ? Изменится ли результат, если допустить вероятность ошибки  $10^{-2}$ ? (Принять, что сигнал замирает по рэлеевскому закону, система с активной паузой, ортогональная в усиленном смысле при автовыборе ветви с наиболее сильным сигналом.)

10.1.16. Составной сигнал дискретной широкополосной системы ( $B=2FT \gg 1$ ) строится следующим образом: информационная посылка длительностью  $T$  разбивается на  $N$  двоичных элементов длительностью  $\tau_0=T/N$ , а в качестве элементарного сигнала используются отрезки синусоидальных колебаний вида  $U_m \sin(\omega_k t + \varphi_k)$  ( $\omega_k=2k\pi/T$ ,  $k=1, N$ ) длительностью  $\tau_0$ .

Полагая, что указанные сигналы использованы для передачи двоичной информации в системе ЧМ, оценить вероятность ошибки при оптимальном когерентном приеме и удельную скорость передачи при  $N=200$ ,  $T=20$  мс, если в канале действует стационарный гауссовский белый шум со спектральной плотностью мощности  $N_0=10^{-6}$  Вт/Гц.

10.1.17. Показать, что при использовании широкополосных сигналов с базой  $B=2FT \gg 1$  влияние сосредоточенных по спектру помех уменьшается пропорционально базе сигнала.

10.1.18. Определить энергетический выигрыш ЭВ при переходе от параллельного метода передачи дискретной информации к последовательному в однолучевом гауссовском канале без замираний, если число подканалов параллельной системы равно  $n$  и если при этом переходе сохраняется: а) средняя мощность сигнала; б) пиковая мощность сигнала.

10.1.19. Известно, что в подрэлеевском канале связи при аппроксимации нормированной корреляционной функции компонент канала функцией  $R(T)=\exp(-T^2/2\beta^2)$  и ОФМ несократимая вероятность ошибок

$$p = T^2 \exp(-q^2)/(4\beta^2),$$

где  $\beta$  — средний период замираний;  $q^2$  — превышение регулярной части сигнала над флуктуирующей.

Определить выигрыш по вероятности ошибки при переходе от параллельной системы с числом каналов  $n=12$  к последовательной системе передачи при скорости передачи  $R=1200$  бит/с,  $q^2=5$ ,  $\beta=0,1$  с.

10.1.20. В двухлучевом рэлеевском канале со взаимным запаздыванием лучей  $\Delta t=2$  мс длинные посылки ( $T_1=5$  мс) обрабатываются на интервале анализа  $T_{a1}=T_1-\Delta t$ , а короткие посылки ( $T_2<2$  мс) — на интервале анализа  $T_{a2}=T_2+\Delta t$ . При этом закон распределения энергии посылки на интервале анализа оказывается различным.

Определить энергетический выигрыш по средней мощности при переходе от параллельной системы с  $n=20$  к последовательной при скорости передачи  $R=1200$  бит/с, если по обоим лучам распространения среднее превышение сигнал-шум одинаково и равно  $\overline{h^2}=20$ .

## 10.2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ АНАЛОГОВЫХ И ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

Если источник непрерывного сообщения является гауссовским, то скорость передачи  $R=F_c \log \rho_{\text{вых}}$ . В этом случае информационная эффективность может быть записана в виде

$$\eta = (\log \rho_{\text{вых}})/\alpha \log(\rho_{\text{вых}}/g+1),$$

где  $g$  — выигрыш системы модуляции.

Так же, как и для дискретных систем, непрерывные системы можно сравнивать по кривым эффективности  $\beta=f(\gamma)$ , которые могут быть рассчитаны по формулам

$$\beta = g \log \rho_{\text{вых}}/\alpha \rho_{\text{вых}}; \gamma = \log \rho_{\text{вых}}/\alpha. \quad (10.9)$$

Кривые частотной и энергетической эффективности для аналоговых и цифровых систем приведены на рис. 10.3. Для аналоговых систем цифры на кривых указывают значения  $\alpha=F/F_c$ , а цифры в скобках — значения  $\rho_{\text{вых}}$  в децибелах. В области порога кривые для ЧМ изображены штриховыми линиями. Для цифровых систем расчеты производились для канала, в котором устранены межсимвольные помехи. Цифры на кривых — это основание кода. Кривые соответствуют вероятности ошибки  $p=10^{-5}$ , что соответствует величине  $\rho_{\text{вых}} \approx 36$  дБ при равенстве мощностей шума квантования и шума ложных импульсов  $e^2=e^2_{\text{л.п.}}$ .

При фиксированном отношении сигнал-шум на выходе приемника можно определить энергетический выигрыш перехода от  $i$ -й системы к  $j$ -й:

$$\text{ЭВ}_{i/j} = 10 \lg(\rho_{\text{вых } i} R_j / \rho_{\text{вых } j} R_i),$$

$$\rho_{\text{вых}} = \text{const}, \quad (10.10)$$

где  $R_i$  — скорость ввода информации в канал  $i$ -й системы.

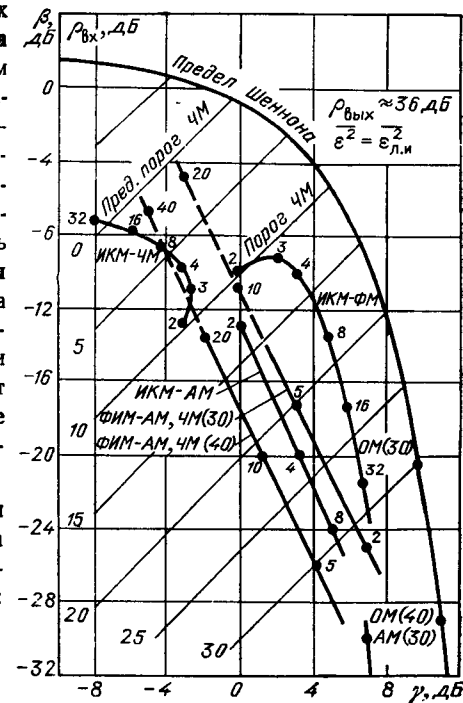


Рис. 10.3. Кривые энергетической и частотной эффективности аналоговых и цифровых систем связи

Если фиксировать скорость ввода информации  $R$ , то  $\text{ЭВ}_{i,j}$  можно выразить через выигрыш системы модуляции  $g$ :

$$\text{ЭВ}_{i,j} = 10 \lg(g_j/g_i). \quad (10.11)$$

Выигрыш по частотной эффективности определяется так же, как и в системах передачи дискретных сообщений

В условиях, когда  $\rho_{\text{вых}}$  (а следовательно, и верность связи) меняется случайно во времени, важной характеристикой качества системы связи является ее надежность  $N$ , определяемая вероятностью (процентом времени для эргодического процесса) того, что  $\rho_{\text{вых}}$  превышает минимально допустимую (пороговую)  $\rho_{\text{вых.пор}}$  величину, определяемую видом сообщения и особенностями его получателя:

$$N = \int_{\rho_{\text{вых.пор}}}^{\infty} \omega_1(\rho_{\text{вых}}) d\rho_{\text{вых}}, \quad (10.12)$$

где  $\omega_1(\rho_{\text{вых}})$  — одномерное распределение величины  $\rho_{\text{вых}}$ . Эффективное средство повышения надежности связи — прием сигналов по независимым каналам.

### Задачи

10.2.1. Рассчитать выигрыш  $g$  и информационную эффективность  $\eta$  для систем АМ, БМ, ОМ, ФМ и ЧМ, полагая, что  $\rho_{\text{вых}} = 40$  дБ, и во всех системах передается одно и то же сообщение с полосой  $F_c$  и пик-фактором  $\Pi = 3$ .

10.2.2. Решить задачу 10.2.1 для систем ФИМ—АМ, ИКМ—АМ, ИКМ—ЧМ, ИКМ—ФМ.

10.2.3. Пользуясь графиками рис. 10.3, оценить величину выигрыша по энергетической и частотной эффективности при переходе от системы ИКМ—ЧМ при основании кода  $M = 4$  к системе ИКМ—ФМ с тем же основанием кода.

10.2.4. Найти выигрыш по частотной и энергетической эффективности при переходе от 10-позиционной к 5-позиционной системе ЧМ при  $\rho_{\text{вых}} = 30$  и 40 дБ.

10.2.5. На сколько ниже предела Шеннона частотная и энергетическая эффективность 4-позиционной системы ИКМ—ФМ?

10.2.6. Найти энергетический выигрыш перехода от системы АМ, предназначенной для передачи речевого сообщения с пик-фактором  $\Pi = 3$ ,  $m = 0,3$  и  $F_c = 3,1$  кГц, к системе ФМ при  $\beta_{\text{ФМ}} = 10$ .

10.2.7. Найти энергетический выигрыш перехода от системы АМ, предназначенной для передачи речевого сообщения с пик-фактором  $\Pi = 3$ ,  $m = 0,3$  и  $F_c = 3,1$  кГц, к системе ЧМ при  $\beta_{\text{ЧМ}} = 15$ .

10.2.8. Найти энергетический выигрыш при переходе от системы ФМ к системе ЧМ с той же полосой.

10.2.9. Найти значения энергетического выигрыша, выигрыша по удельной (на 1 Гц полосы частот) скорости передачи информации при переходе от системы передачи сообщения без модуляции к системе АМ, полагая, что в обеих системах передается речевое сообщение с пик-фактором  $\Pi = 3$  и нормированной корреляционной

функцией  $R_B = \exp[-\beta|\tau|]$ ,  $\beta = 10^3$  Гц. Считать, что при амплитудной модуляции несущей  $m = 0,4$ .

10.2.10. Решить задачу 10.2.9 для случая перехода к системе БМ.

10.2.11. Решить задачу 10.2.9. для случая перехода к системе ОМ.

10.2.12. Решить задачу 10.2.9 для случая перехода к системе ФМ, приняв  $\beta_{\text{ФМ}} = 7$ .

10.2.13. Решить задачу 10.2.9 для случая перехода к системе ФИМ—ОМ, приняв, что длительность импульса при ФИМ  $\tau_n = 2,5 \cdot 10^{-5}$  с.

10.2.14. Решить задачу 10.2.9. для случая перехода к системе АИМ—ОМ, приняв длительность импульса  $\tau_n = 2,5 \cdot 10^{-5}$  с.

10.2.15. Определить надежность связи в процентах при передаче речевых сообщений, если  $\omega_1(\rho_{\text{вых}})$  имеет рэлеевское распределение, а  $\rho_{\text{пор}}/\rho_{\text{вых}} = 0,01; 1; 10$ .

10.2.16. Во сколько раз увеличится надежность  $N_2$  связи, если прием речевых сообщений вести по двум независимым каналам с одинаковой статистикой при условии, что надежность одноканального приема  $N_1 = 0,1; 0,5; 0,8; 0,9; 0,99$ .

10.2.17. Во сколько раз изменится величина надежности 3-канальной системы разнесения  $N_3$  по сравнению с 2-канальной  $N_2$ , если  $N_1 = 0,5$ .

10.2.18. Найти предельный коэффициент информационной эффективности в системах АМ, БМ, ОМ, ФМ, ФИМ—ОМ при  $\rho_{\text{вых}} = 1000; 5000$ , если во всех системах передается речевое сообщение, а параметры системы те же, что в задачах 10.2.9—10.2.14.

## 10.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Имея в виду, что в канале действует флуктуационный шум с энергетическим спектром  $N_0$ , будем сравнивать две  $n$ -канальные системы, обеспечивающие одинаковую верность и одинаковую суммарную скорость передачи информации  $R_n = \text{const}$  по параметру эквивалентного отношения сигнал-шум:

$$\rho_{\text{э}n} = P_{\text{с}n} / (N_0 R_n), \quad (10.13)$$

где  $P_{\text{с}n}$  — средняя мощность канального сигнала в  $n$ -канальной системе.

Энергетический выигрыш перехода от  $i$ -й  $n$ -канальной системы к  $j$ -й в децибелах при фиксированной верности и скорости передачи информации

$$\text{ЭВ}_{i,j} = 10 \lg(\rho_{\text{э}ni} / \rho_{\text{э}nj}) = 10 \lg(P_{\text{с}ni} / P_{\text{с}nj}). \quad (10.14)$$

Энергетическая цена уплотнения

$$\xi_{\text{P}}(n) = P_{\text{с}n} / P_{\text{с}1} \quad (10.15)$$

показывает, во сколько раз необходимо увеличить среднюю мощность сигнала в  $n$ -канальной системе по сравнению с одноканальной, чтобы при той же спект-

ральной плотности мощности помех обеспечить неизменную верность приема в каждом канале. Очевидно,

$$\mathcal{E}B_{i/j} = 10 \lg \left[ \frac{\xi_p(n)_i \rho_{\partial i 1}}{\xi_p(n)_j \rho_{\partial j 1}} \right] = \mathcal{E}B_{i/1} + 10 \lg \frac{\xi_p(n)_i}{\xi_p(n)_j}, \quad (10.16)$$

где  $\mathcal{E}B_{i/j}$  — энергетический выигрыш перехода от  $i$ -й системы к  $j$ -й в одноканальном режиме при неизменных верности и скорости передачи информации  $R_1 = \text{const}$ .

Если  $i$ -я и  $j$ -я системы отличаются только способом разделения сигналов, то

$$\mathcal{E}B_{i/j} = 10 \lg [\xi_p(n)_i / \xi_p(n)_j]. \quad (10.17)$$

Удельная скорость (коэффициент частотной эффективности)  $n$ -канальной системы определяется коэффициентом

$$\gamma_n = R_n / F_n = \mu_n R_1 / F_n = \mu_n \gamma_1 / \xi_F(n), \quad (10.18)$$

где  $\mu_n$  — коэффициент увеличения скорости передачи информации в  $n$ -канальной системе по сравнению с одноканальной;

$$\xi_F(n) = F_n / F_1 \quad (10.19)$$

— спектральная цена уплотнения, которая показывает, во сколько раз необходимо увеличить занимаемую  $n$ -канальной системой полосу частот по сравнению с одноканальной системой;  $\gamma_1$  — эффективность использования полосы частот одноканальной системы. Если для многоканальной системы  $\mu_n = \xi_F(n)$ , то  $\gamma_n = \gamma_1$ . Выигрыш  $\eta_F$  по эффективности использования полосы частот при переходе от  $i$ -й системы к  $j$ -й определим отношением параметров  $\gamma_n$  в сравниваемых системах. Информационная эффективность многоканальной системы при передаче сообщений по независимым каналам

$$\eta = C_c / C_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n C_{ck} / \sum_{k=1}^n C_k. \quad (10.20)$$

Здесь  $C_k$  — пропускная способность  $k$ -го канала при заданном способе разделения;  $C_{ck}$  — пропускная способность расширенного  $k$ -го канала.

Разделение существующих каналов связи с заданной пропускной способностью  $C$  независимыми источниками приводит к существенному повышению эффективности связи

## Задачи

**10.3.1.** В полосе стандартного телефонного канала шириной  $F = 3100$  Гц необходимо передавать информацию от независимых двоичных источников без избыточности с производительностью  $H' = 1/T_{\Sigma} = 50$  бит/с.

Сколько источников можно разделить по форме, если в каждом канале используется частотная модуляция, а прием осуществляется согласованными фильтрами в указанной полосе при неопределенной фазе сигнала.

**10.3.2.** По условию задачи 10.3.1 определить число каналов при частотном разделении (при использовании в месте приема полосовых фильтров).

**10.3.3.** В условиях задачи 10.3.1 определить коэффициент использования полосы частот двоичной ЧМ в однополосном режиме  $\gamma_1$  при приеме с помощью согласованного и полосового фильтров. Определить также для обеих систем спектральную цену разделения  $\xi_F(n)$ , коэффициент увеличения скорости передачи информации  $\mu_n$  и коэффициент использования полосы частот  $\gamma_n$ .

**10.3.4.** Система с частотным разделением образуется путем однополосной модуляции поднесущих и частотной модуляции общей несущей (система ОМ—ЧМ). Будем считать системой А многоканальную систему ОМ—ЧМ, у которой девиация частоты  $\Delta f$  не меняется с изменением числа каналов  $n$ , а системой Б — многоканальную систему ОМ—ЧМ, у которой  $\Delta f$  растет пропорционально числу каналов  $n$ .

Показать, что энергетический выигрыш перехода от системы А к системе Б  $\mathcal{E}B_{A/B} = 10 \lg n^2$ , что достигается ценой расширения занимаемой полосы частот в  $n$  раз.

**10.3.5.** Определить энергетический проигрыш по отношению сигнал-шум на выходе детектора индивидуального канала и спектральный проигрыш перехода от 2-канальной системы фазового разделения, рассмотренной в задаче 9.2.9 (при  $\Delta = 0$ ), к 2-канальной системе частотного разделения с групповым сигналом

$$s(t) = \dot{X}_1(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \dot{X}_2(t) \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

при одинаковой пиковой мощности передатчика. Разнос между средними частотами каналов считать равным удвоенной ширине спектра модулирующего сигнала  $\dot{X}_i(t)$ . Пик-фактор модулирующего сигнала  $\Pi = 3$ .

**10.3.6.** Найти спектральный выигрыш перехода от асинхронной системы частотного разделения ЧМ—ЧМ, предназначенной для передачи  $N = 13440$  независимых речевых сообщений, к асинхронно-адресной АА системе на такое же число каналов, рассмотренной в задаче 9.2.14. Считая, что обе системы работают при больших отношениях сигнал-шум (выше пороговых) и обеспечивают одинаковую верность при одинаковом отношении сигнал-шум в канале, определить энергетический проигрыш перехода от системы АА к системе ЧМ—ЧМ.

**10.3.7.** Определить энергетический выигрыш и выигрыш по эффективности использования полосы частот при переходе от 2-канальной системы частотного разделения с частотной модуляцией, предназначенной для передачи независимых сообщений от двоичных источников без избыточности, к системе ДЧМ. Считать, что пиковая мощность передатчика фиксирована, в канале действует гауссовский белый шум, сигнал известен с точностью до фазы и осуществляется оптимальный некогерентный прием.

**10.3.8.** Определить энергетический выигрыш и выигрыш по эффективности использования полосы частот при переходе от 2-канальной системы частотного или временного разделения к системе ДОФМ. Считать, что во всех сравниваемых системах передается

информация от двух независимых двоичных источников без избыточности, пиковая мощность передатчика фиксирована, в каждой системе осуществляется ОФМ, в канале действует гауссовский белый шум, сигнал известен точно в месте приема и осуществляется оптимальный когерентный прием.

10.3.9. Определить пропускную способность 20-канальной системы частотного разделения с независимым гауссовским белым шумом и интенсивностью, приведенной к входу передатчика,  $N_0 = 4,6 \cdot 10^{-4}$  Вт/Гц в отдельных каналах, полагая, что каждый канал занимает полосу частот  $F_k = 8000$  Гц, переходная погрешность в каждом канале имеет характер гауссовского белого шума со средней мощностью, пропорциональной суммарной средней мощности остальных каналов, в передатчике фиксирована пиковая мощность  $P_{\text{макс}} = 100$  кВт и работает он в строго линейном режиме.

10.3.10. Определить пропускную способность 20-канальной системы временного разделения с теми же характеристиками канала (в том числе по суммарной полосе частот  $F_{\Sigma} = 20 F_k$ ) и передатчика, что в задаче 10.3.9. Сравнить значения пропускных способностей, полученных в этих двух случаях.

10.3.11. Определить коэффициент эффективности 20-канальной системы передачи независимых непрерывных гауссовских сообщений, каждое из которых занимает полосу  $F_c = 4000$  Гц и превышает по средней мощности эквивалентный равномерный по полосе гауссовский шум на выходе канала в 7 раз. Сообщения передаются: а) по каналу с частотным разделением (задача 10.3.9), когда можно пренебречь переходным шумом; б) по каналу с временным разделением (задача 10.3.10), когда можно пренебречь переходным шумом.

10.3.12. Определить коэффициент эффективности 20-канальной системы передачи независимых сообщений от дискретных источников без избыточности с производительностью  $H' = 4000$  бит/с. Сообщения передаются по двум разновидностям каналов, рассмотренных в предыдущей задаче (ошибками в расширенном дискретном канале пренебречь).

10.3.13. Канал связи, имеющий большую протяженность, с общей пропускной способностью 10000 бит/с используется при передаче информации от 100 независимых источников с производительностью 50 бит/с каждый.

Показать, что стоимость передачи 1 бита информации в канале с разделением в 25 раз меньше, чем при использовании для каждого источника индивидуального канала с пропускной способностью 100 бит/с, если стоимость такого канала в 4 раза меньше стоимости одного канала с разделением.

## 10.4. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИЗБЫТОЧНОГО КОДИРОВАНИЯ И МНОГОПОЗИЦИОННЫХ СИГНАЛОВ

Параметром, по которому различные коды, а также различные системы передачи дискретных сообщений можно сравнивать между собой, является эквивалентная вероятность ошибки приема элементарного символа:

$$p_0 = 1 - (1 - p_k)^{1/k}, \quad (10.21)$$

где  $p_k$  — вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации данного кода,  $k$  — число информационных разрядов. Эквивалентная вероятность ошибки определяет вероятность ошибки элементарного символа в двоичном симметричном стационарном канале без памяти, в котором система с примитивным кодированием обеспечивает при передаче того же количества информации ту же вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации  $p_k$ , что и заданная система с избыточным кодом.

Сравнение систем связи, использующих различные коды, по эквивалентной вероятности ошибки  $p_0$  целесообразно проводить при неизменной средней скорости передачи информации  $R = v_k(1 - \alpha_k) = k/(nT_c)$  и фиксированной средней мощности сигнала  $P_c$ .

Очевидно, что корректирующий код целесообразно применять в случае, когда  $p_0 < p_0$ , где  $p_0$  — вероятность ошибки, которая имела бы место при использовании примитивного кода и неизменной скорости передачи информации. С другой стороны из двух корректирующих кодов лучше тот, который обеспечивает меньшее значение  $p_0$ .

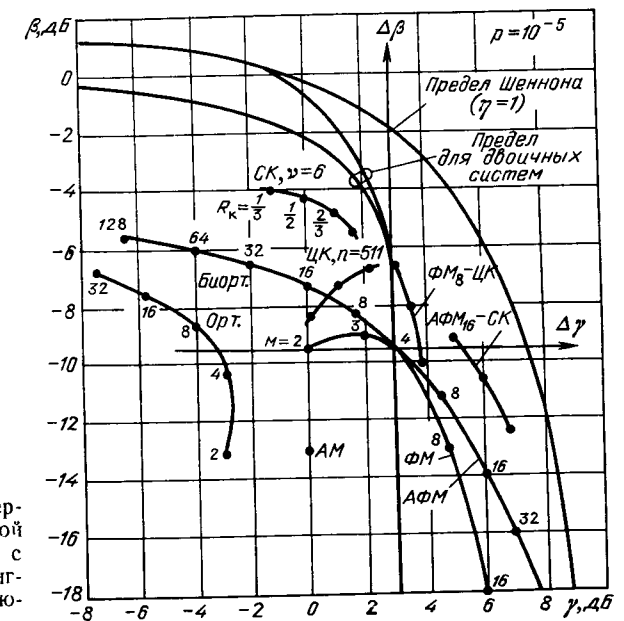


Рис 10.4 Кривые энергетической и частотной эффективности систем с многопозиционными сигналами и корректирующими кодами

Если фиксировать спектральную плотность мощности шума  $N_0$  и  $R$ , то параметром сравнения можно сделать эквивалентное отношение сигнал-шум

$$\rho_a = \rho n / k = P_c / (N_0 R). \quad (10.22)$$

Выигрыш по  $\rho_a$  при переходе от  $i$ -й к  $j$ -й системе

$$\delta_{i/j} = \rho_a i / \rho_a j, \quad R = \text{const}, \quad \rho_a = \text{const}. \quad (10.23)$$

Эффективность системы кодирования можно оценить и по энергетическому выигрышу перехода от  $i$ -й системы к  $j$ -й:

$$\Delta V_{i/j} = 10 \lg(\rho_a i / \rho_a j), \quad \rho_a = \text{const}. \quad (10.24)$$

На рис. 10.4 приведены  $\beta\gamma$  — диаграммы для некоторых ансамблей многопозиционных сигналов. Значения энергетической эффективности определялись по кривым помехоустойчивости [7, 11]  $p = j(h^2)$  для вероятности ошибки  $p = 10^{-5}$  (при  $p < 10^{-3}$   $R \approx 1/T$ ,  $\beta = 1/h^2$ ). При этом частотная эффективность

$$\gamma = \log M / (TF) = 2 \log M / n. \quad (10.25)$$

где  $M$  — объем ансамбля сигналов;  $n$  — его размерность (база).

## Задачи

**10.4.1.** Найти эквивалентную вероятность ошибки в однородном симметричном канале без памяти при применении «оптимального» совершенного кода  $(n, 1)$ , использующего двоичные кодовые комбинации

$$\mathbf{b}_1 = \underbrace{1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1}_n, \quad \mathbf{b}_2 = \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0}_n,$$

если декодирование с исправлением ошибок осуществляется по минимуму расстояния по Хеммингу.

**10.4.2.** Показать, что эквивалентная вероятность ошибки при использовании совершенного кода  $(3, 1)$  с кодовыми комбинациями 111 и 000 в однородном симметричном канале с независимыми ошибками равна  $3\rho^2_0$  ( $\rho_0$  — вероятность ошибочной регистрации элементарного символа).

**10.4.3.** Найти эквивалентную вероятность ошибки для линейного кода  $(7, 4)$ . Определить выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки при переходе от примитивного кодирования к кодированию кодом  $(7, 4)$ , если  $\rho_0 = 10^{-2}$ ;  $10^{-4}$ ;  $10^{-6}$ .

**10.4.4.** Найти энергетический выигрыш перехода от системы с примитивным кодированием к системе с кодом  $(7, 4)$  в канале со случайной фазой и ортогональными в усиленном смысле сигналами при  $R = \text{const}$  и  $\rho_a = 10^{-2}$ ;  $10^{-3}$ ;  $10^{-4}$ ;  $10^{-5}$ ;  $10^{-6}$ .

**10.4.5.** В канале с медленными рэлеевскими замираниями передача информации осуществляется примитивным кодом и кодом  $(7, 4)$ . Какой выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки дает использование кода  $(7, 4)$ , если вероятность ошибки в регистрации одного символа (вероятность ошибочного перехода)  $\rho_0 = 10^{-2}$ ;  $10^{-3}$ ;  $10^{-4}$ ;  $10^{-5}$ ;  $10^{-6}$ .

**10.4.6.** В условиях задачи 10.4.5 определить величину энергетического выигрыша перехода от примитивного кодирования к избыточному кодированию кодом  $(7, 4)$ . Объяснить полученный результат.

**10.4.7.** Код  $(7, 4)$  используется для передачи информации в канале с быстрыми рэлеевскими замираниями при вероятности ошибки в приеме элементарного символа  $\rho_0 = 10^{-2}$ ;  $10^{-3}$ ;  $10^{-4}$ ;  $10^{-5}$ ;  $10^{-6}$ . Какой выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки дает применение кода  $(7, 4)$  по сравнению с примитивным кодом?

**10.4.8.** В условиях задачи 10.4.7 определить величину энергетического выигрыша перехода от примитивного кодирования к кодированию кодом  $(7, 4)$ . Объяснить полученный результат.

**10.4.9.** Для передачи информации в гауссовском канале с неопределенной фазой и ортогональными в усиленном смысле сигналами использован код  $(3, 1)$  с кодовыми комбинациями 000 и 111. Коэффициент передачи канала  $k$ . Вычислить выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки при переходе от поэлементного приема к приему в целом.

**10.4.10.** В канале с постоянными параметрами при наличии аддитивного стационарного гауссовского белого шума осуществляется оптимальный когерентный прием двоичных сигналов ЧМ при вероятности ошибки  $p_0 = 0,5[1 - \Phi(\sqrt{h^2})]$ . В этих условиях предполагается использовать корректирующий  $(n, k)$ -код, исправляющий ошибки максимальной кратности  $q_n$ . Определить условия, при которых такой код целесообразно использовать, полагая, что  $h^2 \gg 1$ .

**10.4.11.** Циклический код  $(7, 4)$  исправляет все одиночные ошибки. Целесообразно ли применение этого кода при осуществлении оптимального когерентного приема?

**10.4.12.** Целесообразно ли применение кода  $(3, 1)$ , исправляющего все одиночные ошибки, при поэлементном оптимальном когерентном приеме?

**10.4.13.** Какую максимальную избыточность должен иметь код, исправляющий все одиночные ошибки, чтобы его целесообразно было применять в условиях задачи 10.4.12?

**10.4.14.** Как меняются с ростом объема ансамбля  $M$  при фиксированной размерности  $n$  удельная скорость  $\gamma$  и энергетическая эффективность  $\beta$  для систем многопозиционных сигналов ФМ и АФМ?

**10.4.15.** Объяснить, почему в системах биортогональных, ортогональных и симплексных сигналов с ростом объема ансамбля  $M$  возрастает энергетическая эффективность. Какова цена этого увеличения?

**10.4.16.** Определить частотную, энергетическую и информационную эффективность системы с сигналами 4-позиционной ФМ ( $\Phi M_4$ ), относящимися к классу биортогональных с  $M=4$ .

10.4.17. Приняв за эталон систему ФМ<sub>4</sub>, разделить представленные на рис. 10.4 системы на следующие группы:

- 1) малозффективные системы;
- 2) системы с высокой энергетической эффективностью;
- 3) системы с высокой частотной эффективностью;
- 4) высокоэффективные системы.

10.4.18. Какие сигналы необходимо применить в системе, обеспечивающей энергетический выигрыш  $\Delta\beta=2,4$  дБ и системы частотной эффективности  $\Delta\gamma=3$  дБ по сравнению с системой ФМ<sub>4</sub>?

10.4.19. Пользуясь рис. 10.4, обосновать целесообразность перехода в непрерывном канале с постоянными параметрами при  $p=10^{-5}$  от системы ФМ<sub>2</sub> без кодирования и оптимальном когерентном приеме к системе с помехоустойчивым кодированием.

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГЛАВЫ 1

### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 1.1.

1.1.1. Поскольку каждый символ в 3-символьной последовательности может принимать одно из восьми значений, источник может выдать  $N=8^3=512$  различных сообщений. Реализации сообщений, у которых два первых символа  $a_{11}a_{72}$ , выглядят следующим образом:

- |                           |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1) $a_{11}a_{72}a_{03}$ ; | 2) $a_{11}a_{72}a_{13}$ ; | 3) $a_{11}a_{72}a_{23}$ ; |
| 4) $a_{11}a_{72}a_{33}$ ; | 5) $a_{11}a_{72}a_{43}$ ; | 6) $a_{11}a_{72}a_{53}$ ; |
| 7) $a_{11}a_{72}a_{63}$ ; | 8) $a_{11}a_{72}a_{73}$ . |                           |

1.1.3. Число всевозможных двоичных 7-разрядных кодовых комбинаций  $N=2^7=128$ . Две возможных реализации сообщений заданного источника таковы: 1) 0111001; 2) 1010110.

1.1.5. Так как каждый символ пары принимает два возможных значения: 0 или 1, то число всевозможных пар двоичных символов равно  $2^2=4$ . Следовательно, символ  $c_{ih}$  имеет четыре реализации.

1.1.6. При заданной погрешности квантования  $\delta=0,5^\circ$  шаг квантования  $\Delta=1^\circ$ . При таком шаге квантования шкала температур в интервале  $18 \dots 36^\circ$  должна быть разбита на  $K=19$  уровней. Заданный источник может выдать  $N=4^{19}$  сообщений.

1.1.8. Число элементов сообщения при дискретном времени  $n=T/\Delta t=2F_{\max}T=2 \cdot 4000 \cdot 0,1=800$ . Каждый элемент может принимать любое из  $1+(P_{\max}-P_{\min})/\Delta P=3,5-0,5+1=4$  значений давления. Следовательно, число реализаций сообщения источника  $N=4^{800}$ .

1.1.11. Число реализаций сигнала на интервале  $7T$   $N=2^7=128$ . Огибающая амплитудного спектра такого сигнала будет соответствовать модулю комплексной спектральной плотности оди-

ночного прямоугольного импульса высотой  $h$  и длительностью  $T$ :

$$S(j\omega) = \int_0^T h \exp(-j\omega t) dt = h [1/j\omega - \{1/j\omega\} \exp(-j\omega T)] = \\ = hT \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \exp(-0,5j\omega T).$$

Модуль комплексной спектральной плотности  $S(\omega) = hT \left| \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right|$ .

Следовательно,  $S_b(\omega) = hT \left| \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right|$ . Нули спектра будут соответствовать частотам, на которых  $\sin \pi f_k T = 0$ , или  $\pi f_k T = k\pi$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ). Отсюда  $f_k = k/T$ . Если ограничить спектр сигнала тремя первыми лепестками функции  $|\sin \pi f T / \pi f T|$ , то его ширина будет равна  $3/T=300$  Гц.

1.1.12. Период следования стробирующих импульсов равен шагу дискретизации  $\Delta t=0,5/F$ . Следовательно, частота генератора стробирования  $f_{\text{стр}}=1/\Delta t=2F_{\max}=8$  кГц. На интервале  $T=2$  мс при шаге  $\Delta t=0,5/F_{\max}=1,25 \cdot 10^{-4}$  с будет передано 16 отсчетов, каждый из которых может принимать одно из  $b/\Delta b=50$  значений. Следовательно, заданный речевой сигнал при его дискретизации и квантовании будет определяться  $N=50^{16}$  реализациями.

1.1.14. Очевидно, что при одинаковых длительностях и динамических диапазонах двух сигналов отношение их объемов будет равно отношению их частотных полос:

$$V_{\text{ТВ}}/V_{\text{РВ}}=F_{\text{ТВ}}/F_{\text{РВ}}=(6,5 \cdot 10^6)/(1,2 \cdot 10^4) \approx 540.$$

1.1.16. Как показано в решении задачи 1.1.14,

$$V_{\text{ТЛФ}}/V_{\text{ТЛГ}}=F_{\text{ТЛФ}}/F_{\text{ТЛГ}}.$$

Для удовлетворительной передачи телефонного сообщения в спектре речевого сигнала достаточно сохранить частотные составляющие в полосе  $300 \dots 3400$  Гц. Поэтому примем  $F_{\text{ТЛФ}}=3100$  Гц.

Найдем полосу телеграфного сигнала. Эта величина зависит от длительности элементарного импульса следующим образом:  $F_{\text{ТЛГ}}=n/\tau_n$ , где  $n$  — целое число порядка единицы. Определим величину  $\tau_n$ . За 30 с по телеграфному каналу передается 100 букв, каждой из которых соответствует кодовая комбинация, содержащая пять элементарных импульсов. Следовательно, за 30 с будет передано 500 импульсов, и длительность каждого импульса  $\tau_n=30/500=6 \cdot 10^{-2}$  с. Поскольку для удовлетворительного воспроизведения обычно достаточно сохранить в спектре треть гармонике частоты повторения импульсов, примем  $F_{\text{ТЛГ}}=3/\tau_n=50$  Гц. Отсюда  $V_{\text{ТЛФ}}/V_{\text{ТЛГ}}=3100/50=62$ , т. е. телеграфный сигнал экономичнее телефонного в 62 раза.

1.1.17. По формуле (1.3)  $D_c=10 \lg(P_{\max}/P_{\text{ш}})$ . Величину динамического диапазона сигнала, который может быть передан по заданному каналу, найдем по формуле (1.1):  $D_c=V_{\text{к}}/T_{\text{к}}F_{\text{к}}$ . С уче-



том этого результата получаем  $P_{\text{макс}} = 10P_{\text{ш}}$ . Найдем теперь мощность шума в канале с полосой  $F_k = 10$  кГц:

$$P_{\text{ш}} = N_0 F_k = 10^{-4} \cdot 10^4 = 1 \text{ мВт.}$$

Отсюда  $P_{\text{макс}} = 10$  мВт.

1.1.19. Предполагая, что заданный сигнал и канал согласованы по полосе, длительности использования, найдем допустимый динамический диапазон АМ-сигнала, который можно передать без существенных искажений по каналу с заданным объемом:

$$D_c = V_k / T_c F_c = 10.$$

Выразим теперь максимальную и минимальную мощности АМ-сигнала (за период модулирующего процесса) через величину коэффициента глубины модуляции:  $P_{\text{макс}} = U_m^2 (1+m)^2$ ;  $P_{\text{мин}} = U_m^2 (1-m)^2$ .

Подставляя найденные значения  $P_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{мин}}$  в выражение для  $D_c$ , получаем  $D_c = 10 \lg[(1+m)^2 / (1-m)^2]$  или  $(1+m)^2 / (1-m)^2 = 10^{0,1 D_c}$ . В данном случае  $D_c = 10$  и  $(1+m)/(1-m) = \sqrt{10}$ . Отсюда получаем  $m = 0,53$ .

1.1.21. Если длительность и полоса сигнала согласованы с соответствующими параметрами канала, то  $D_c = V_k / (F_c T_c) = 20$ . Так как в соответствии с (1.3)  $D_c = 10 \lg(P_{\text{макс}}/P_{\text{ш}})$ , находим

$$P_{\text{макс}}/P_{\text{ш}} = 10^{0,1 D_c} = 100.$$

При ЧМ пиковая мощность сигнала  $P_{\text{макс}} = U_m^2$ . Найдем среднюю мощность шума в канале и полосе сигнала:

$$P_{\text{ш}} = \int_{f_0 - 0,5 F_c}^{f_0 + 0,5 F_c} G_0(f) df = (\sqrt{\pi} B(0)/\beta) \int_{f_0 - 0,5 F_c}^{f_0 + 0,5 F_c} \exp[-\pi^2 (f - f_0)^2 / \beta^2] df.$$

Вводя обозначение  $\sigma = \beta / \sqrt{2\pi^2}$ , получаем

$$P_{\text{ш}} = (B(0) / \sqrt{2\pi\sigma^2}) \int_{f_0 - 0,5 F_c}^{f_0 + 0,5 F_c} \exp[-(f - f_0)^2 / 2\sigma^2] df.$$

После замены переменной  $t = (f - f_0)\sigma$  имеем  $P_{\text{ш}} = B(0)\Phi \times (0,5 F_c / \sigma)$ , где  $\Phi(x)$  — функция Крампса. Отсюда  $P_{\text{ш}} = 10^{-2} \Phi \times (0,44 \sqrt{2\pi}) = 9,5 \cdot 10^{-3}$  Вт. С учетом этого результата имеем  $U_m = \sqrt{P_{\text{макс}}} = \sqrt{100 P_{\text{ш}}} = 0,975$  В.

1.1.22. Вероятность того, что уровень мощности  $P_{\text{мин}} = A_{\text{мин}}^2$  не будет превышен, равна вероятности того, что амплитуда замирающего сигнала будет не больше  $A_{\text{мин}}$ :

$$p(A < A_{\text{мин}}) = \int_0^{A_{\text{мин}}} (2A/\bar{A}^2) \exp(-A^2/\bar{A}^2) dA = 1 - \exp(-A_{\text{мин}}^2/\bar{A}^2)$$

Отсюда находим  $P_{\text{мин}} = A_{\text{мин}}^2 = -\bar{A}^2 \ln[1 - p(A < A_{\text{мин}})]$ . По условию  $p(A < A_{\text{мин}}) = 10^{-3}$ . Поэтому  $P_{\text{мин}} = \bar{A}^2 \ln(0,999) \approx 10^{-3} \bar{A}^2$ . Аналогично для  $P_{\text{макс}} = A_{\text{макс}}^2$  находим  $P_{\text{макс}} = -\bar{A}^2 \ln 10^{-3} = 6,9 \bar{A}^2$ . Динамический диапазон

$$D_c = 10 \lg(P_{\text{макс}}/P_{\text{мин}}) = 88,4 \text{ дБ.}$$

По формуле (1.1)  $V_c = 88,4 \cdot 10^4 \cdot 10^3 = 3,54 \cdot 10^8$ .

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 1.2

1.2.1. Согласно (1.10)  $8 = 2^n$ , откуда число разрядов

$$n = \log_2 8 = 3.$$

Процедура кодирования и кодовые комбинации приведены в табл. Р.1.1. Граф кода приведен на рис. Р.1.1.

Таблица Р.1.1.

Символ	Число	Разложение числа по модулю 2	Кодовая комбинация
$a_1$	0	$0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	000
$a_2$	1	$0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	001
$a_3$	2	$0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	010
$a_4$	3	$0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	011
$a_5$	4	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	100
$a_6$	5	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	101
$a_7$	6	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	110
$a_8$	7	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	111

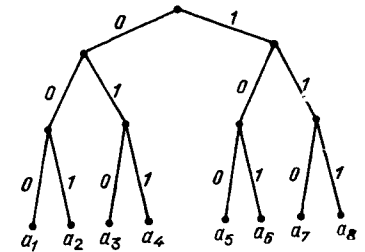


Рис. Р.1.1 Граф 3-разрядного двоичного кода

1.2.3. Указание к решению. Учтите, что число разрядов в кодовой комбинации не может быть дробным.

1.2.8. Согласно (1.9)  $K \leq m^n$ . Поэтому для  $m=2$  при  $n=2$   $K \leq 4$ ; при  $n=3$   $K \leq 8$ ; при  $n=5$   $K \leq 32$ .

Для  $m=3$  при  $n=2$   $K \leq 9$ ; при  $n=3$   $K \leq 27$ ; при  $n=5$   $K \leq 243$ .

Для  $m=8$  при  $n=2$   $K \leq 64$ ; при  $n=3$   $K \leq 512$ ; при  $n=5$   $K \leq 32768$ .

1.2.9. Одна кодовая комбинация стартстопного телеграфного аппарата содержит  $n=7,5$  посылок длительностью  $T=20$  мс каждая. Общая длительность кодовой комбинации  $T_k = 20 \cdot 7,5 = 150$  мс. Техническая скорость  $v = n/T_k = 1/T = 1/20 = 50$  Бод.

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 1.3.

1.3.1. Воспользуемся соотношением (1.14) для ОМ-сигнала. Рассматривая его как модулирующий сигнал для системы ФМ, по формуле (1.15) получим

$$u_{\text{ОМ-ФМ}}(t) = U_0 \cos\{\omega_2 t + k_{\text{ФМ}} [k_{\text{ОМ}} b(t) \cos \times (\omega_1 t + \varphi_1) \mp k_{\text{ОМ}} \tilde{b}(t) \sin(\omega_1 t + \varphi_1)]\}.$$

Так как верхняя граничная частота в спектре ОМ-сигнала  $f_1 + F_{\text{макс}} = 104$  кГц, полоса частот сигнала ОМ—ФМ  $\Delta f = 2\beta_2(f_1 + F_{\text{макс}}) = 15 \cdot 104 = 1,56$  МГц.

1.3.3. Используя формулы (1.15) и (1.12), получаем

$$u_{\text{ФМ-АМ}}(t) = \{U_{02} + k_{\text{АМ}} U_{01} \cos[\omega_1 t + \varphi_1] + k_{\text{ФМ}} b(t) + \varphi_1\} \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

Так как верхняя граничная частота в спектре ФМ сигнала  $f_{\text{макс}} = \beta_1 F_{\text{макс}} + f_1 = 160$  кГц,  $\Delta f_{\text{ФМ-АМ}} = 2f_{\text{макс}} = 320$  кГц.

1.3.5. Используя формулы (1.16) и (1.14), записываем

$$u_{\text{ЧМ-ОМ}}(t) = k_{\text{ОМ}} \left\{ U_{01} \cos \left( \omega_1 t + k_{\text{ЧМ}} \int_0^t b(x) dx + \varphi_1 \right) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + k_{\text{ОМ}} \left\{ U_{01} \sin \left( \omega_1 t + k_{\text{ЧМ}} \int_0^t b(x) dx + \varphi_1 \right) \right\} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \right\}$$

Полоса частот сигнала ЧМ—ОМ будет равна полосе частот ЧМ-сигнала:

$$\Delta f_{\text{ЧМ-ОМ}} = 2\beta_{\text{ЧМ}} F_{\text{макс}} = 120 \text{ кГц.}$$

1.3.8. Так как первый элемент ФМ-сигнала, имеющий фазу, равную нулю, соответствует символу 1, полагаем, что элемент сигнала, имеющий фазу  $\pi$ , соответствует символу 0. Теперь легко записать код, соответствующей заданной реализации сигнала: 11010011.

1.3.11. Так как информация о передаваемом кодовом символе содержится в разности фаз двух соседних посылок сигнала, получаем для случая а) 0111010; б) 1000101.

1.3.12. Воспользовавшись результатом задачи 1.1.11, найдем

$$\Delta f = 3/\tau = 3 \cdot 10^6 \text{ Гц.}$$

1.3.14. В системе АИМ в качестве переносчика используется импульсная последовательность (рис. Р.1.2), которую при отсутствии модуляции на интервале длительности сообщения  $T$  можно записать  $f(t) = \sum_{k=-0,5T/T_{\text{И}}}^{0,5T/T_{\text{И}}} F(t - kT_{\text{И}})$ , где  $F(t)$  определяет форму импульса;  $T_{\text{И}} = 0,5/F_{\text{И}} \leq 0,5/F_{\text{с}}$  — период следования импульсов.

Сигнал АИМ можно записать:

$$u_{\text{АИМ}}(t) = b(t) f(t) = b(t) \sum_{k=-0,5T/T_{\text{И}}}^{0,5T/T_{\text{И}}} F(t - kT_{\text{И}}).$$

Сигнал АИМ—БМ:

$$u_{\text{АИМ-БМ}}(t) = b(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \sum_{k=-0,5T/T_{\text{И}}}^{0,5T/T_{\text{И}}} F(t - kT_{\text{И}})$$

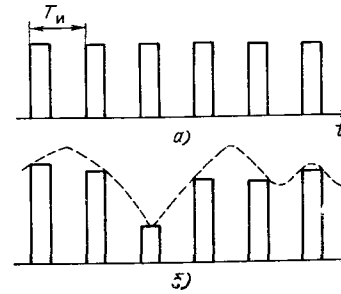


Рис. Р.1.2. Импульсный переносчик (а) и реализация сигнала АИМ (б)

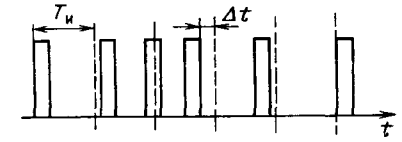


Рис. Р.1.3. Реализация сигнала ФИМ

Полоса частот

$$\Delta f_{\text{АИМ-БМ}} = 2 \Delta f_{\text{АИМ}} = 6 \cdot 10^6 \text{ Гц.}$$

1.3.15. Сигнал ФИМ (рис. Р.1.3) можно записать в виде

$$u_{\text{ФИМ}}(t) = \sum_{k=-0,5T/T_{\text{И}}}^{0,5T/T_{\text{И}}} F(t_k),$$

где  $t_k t = -kT_{\text{И}} + \Delta t_{\text{макс}} b(kT_{\text{И}})$  — временное положение модулируемого импульса;  $\Delta t_{\text{макс}} b(kT_{\text{И}})$  — мгновенное значение временного сдвига импульса от среднего положения;  $\Delta t_{\text{макс}}$  — максимальное отклонение импульса, соответствующее  $b_{\text{макс}}(t) = 1$ .

Сигнал ФИМ—БМ запишем в виде

$$u_{\text{ФИМ-БМ}}(t) = u_{\text{ФИМ}}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \sum_{k=-0,5T/T_{\text{И}}}^{0,5T/T_{\text{И}}} F(t - kT_{\text{И}} + \Delta t_{\text{макс}} b(kT_{\text{И}})).$$

Нетрудно убедиться, что ширина спектра сигналов ФИМ—БМ и АИМ—БМ одинакова.

1.3.16. Коэффициент частотной избыточности определим как отношение полосы канального сигнала к полосе сообщения:

$$K_F = F_{\text{И}}/F_{\text{макс}}. \text{ Тогда } K_{F \text{ ОМ}} = 1; K_{F \text{ БМ}} = 2; K_{F \text{ ФМ}} = 2\beta_{\text{ФМ}};$$

$$K_{F \text{ ЧМ}} = 2\beta_{\text{ЧМ}}; K_{F \text{ АИМ}} = K_{F \text{ ФИМ}} \approx (\tau_{\text{И}} F_{\text{макс}})^{-1};$$

$$K_{F \text{ ОМ-ЧМ}} = 2\beta_{\text{ЧМ}}(f_1 + F_{\text{макс}}) F_{\text{макс}}^{-1}; K_{F \text{ ЧМ-ЧМ}} = 2\beta_{\text{ЧМ}2} (2\beta_{\text{ЧМ}1} F_{\text{макс}} + f_1) F_{\text{макс}}^{-1}.$$

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГЛАВЫ 2

### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 2.1.

2.1.1. Возможные 2-символьные реализации вида  $a_{i1}a_{i2}$ :  $0_10_2$ ,  $0_11_2$ ,  $1_10_2$ ,  $1_11_2$ . Вероятность 2-символьной реализации  $0_10_2$  будет

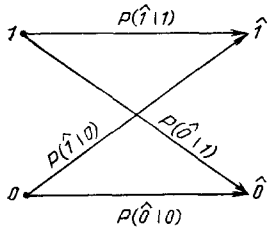


Рис. Р.2.1. Граф дискретного двоичного канала

равна сумме вероятностей таких 3-символьных реализаций, у которых два первых символа — нули:  $P(0_1 0_2) = p_1 + p_5 = 0,25$ . Аналогичным образом находятся вероятности остальных 2-символьных реализаций:

$$P(0_1 1_2) = p_2 + p_6 = 0,25,$$

$$P(1_1 0_2) = p_3 + p_7 = 0,25,$$

$$P(1_1 1_2) = p_4 + p_8 = 0,25.$$

Безусловные вероятности вида  $P(a_{i1})$  равны сумме вероятностей 3-символьных реализаций, у которых первый символ  $a_{i1}$ :

$$P(0_1) = p_1 + p_2 + p_5 + p_6 = 0,5,$$

$$P(1_1) = p_3 + p_4 + p_7 + p_8 = 0,5.$$

Аналогично

$$P(0_2) = p_1 + p_3 + p_5 + p_7 = 0,5; \quad P(1_2) = p_2 + p_4 + p_6 + p_8 = 0,5;$$

$$P(0_3) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,5; \quad P(1_3) = p_5 + p_6 + p_7 + p_8 = 0,5.$$

Условные вероятности переходов находим согласно (2.1):

$$P(0_2/0_1) = P(0_1 0_2) / P(0_1) = 0,5.$$

Аналогично найдем  $p(0_2/1_1) = 0,5$ ,  $P(1_2/0_1) = 0,5$ ,  $P(1_2/1_1) = 0,5$ . Согласно (2.1)

$$P(0_3|0_1 0_2) = \frac{P(0_1 0_2 0_3)}{P(0_1) P(0_2|0_1)} = \frac{0,1}{0,5 \cdot 0,5} = 0,4$$

$$P(0_1 0_2|0_3) = \frac{P(0_1 0_2 0_3)}{P(0_3)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2.$$

Аналогичным образом можно найти и остальные интересующие нас вероятности.

2.1.3. Определим сначала безусловные вероятности  $P(0)$  и  $P(1)$  символов цепи Маркова. Для этого воспользуемся графом переходных вероятностей (рис. Р.2.1), на основе которого составим следующие уравнения:

$$P(0) = P(0)P(0|0) + P(1)P(0|1);$$

$$P(1) = P(0)P(1|0) + P(1)P(1|1).$$

Отсюда, учитывая, что  $P(0) + P(1) = 1$ , находим

$$P(0) = \frac{1 - P(1|1)}{1 - P(1|1) + P(1|0)} = \frac{P(0|1)}{P(0|1) + P(1|0)},$$

$$P(1) = \frac{1 - P(0|0)}{1 - P(0|0) + P(0|1)} = \frac{P(1|0)}{P(1|0) + P(0|1)}.$$

Найдем вероятность  $P(000)$ . Согласно (2.1) с учетом (2.3) получаем  $P(000) = P(0)P(0|0)P(0|0) =$

$$= \frac{1 - P(1|1)}{1 - P(1|1) + P(1|0)} P^2(0|0) = \frac{P(0|0)P(0|0)P(0|1)}{P(0|1) + P(1|0)}.$$

Аналогично  $P(001) = P(0)P(0|0)P(1|0) =$

$$= \frac{1 - P(1|1)}{1 - P(1|1) + P(1|0)} P(0|0)P(1|0) = \frac{P(0|1)P(0|0)P(1|0)}{P(0|1) + P(1|0)};$$

$$P(011) = P(0)P(1|0)P(1|1) = \frac{P(0|1)P(1|0)P(1|1)}{P(0|1) + P(1|0)} \text{ и т. д.}$$

2.1.4. Для решения задачи воспользуемся формулой (2.2). Тогда

$$P(000) = [P(0)]^3 = 8 \cdot 10^{-3} \quad P(111) = [P(1)]^3 = 5,12 \cdot 10^{-1};$$

$$P(001) = P(010) = P(100) = P(1)[P(0)]^2 = 3,2 \cdot 10^{-2};$$

$$P(011) = P(110) = P(101) = P(0)[P(1)]^2 = 1,28 \cdot 10^{-1}.$$

2.1.7. Плотность вероятности амплитуды найдем по формуле (2.5):

$$\omega(U, t) = \frac{\partial F(U, t)}{\partial U} = \frac{2U}{U^2(t)} \exp\left(-\frac{U^2}{U^2(t)}\right).$$

Нестационарность процесса  $U(t)$  вытекает из того, что одномерная плотность вероятности является функцией времени.

2.1.8. Очевидно, что при  $U_1 \rightarrow \infty$

$$F_2(U_1, U_2; t_1, t_2) = 1 - \exp(-U_2^2 / \overline{U_2^2(t)}) = F_1(U_2; t_2).$$

Из (2.5) следует, что

$$\omega_1(U_2; t_2) = \frac{2U_2}{U_2^2(t)} \exp(-U_2^2 / \overline{U_2^2(t)}).$$

Точно так же при  $U_2 \rightarrow \infty$

$$F_2(U_1, U_2; t_1, t_2) = 1 - \exp[-U_1^2 / \overline{U_1^2(t)}] = F_1(U_1; t_1)$$

$$\text{и } \omega_1(U_1; t_1) = \frac{2U_1}{U_1^2(t)} \exp[-U_1^2 / \overline{U_1^2(t)}].$$

Согласно (2.5)

$$\omega_2(U_1, U_2; t_1, t_2) = \frac{2U_1}{U_1(t)} \exp[-U_1^2 / \overline{U_1^2(t)}] \frac{2U_2}{U_2^2(t)} \exp[-U_2^2 / \overline{U_2^2(t)}] =$$

$$= \omega_1(U_1; t_1) \omega_1(U_2; t_2),$$

что доказывает независимость двух сечений помехи.

2.1.9. Указание к решению. Для определения плотности вероятности в каждом сечении воспользуйтесь соотношением

$$\omega_1(n_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2(n_i, n_k; \tau) dn_k.$$

При интегрировании по неинтересующей нас переменной дополнить показатель степени экспоненты до полного квадрата.

2.1.11. Указание к решению. Воспользуйтесь соотношением  $\omega(n_1, n_2; \tau) = \omega_1(n_1) \omega(n_2/n_1; \tau)$ .

2.1.13. Математическое ожидание дискретного случайного процесса найдем по формуле  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ . В нашем случае  $\bar{X} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 + p_5 x_5 = 0$ . Дисперсию дискретного случайного процесса находим по формуле  $\overline{(X - \bar{X})^2} = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \bar{X})^2$ .

В нашем случае

$$\overline{(X - \bar{X})^2} = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + p_4 x_4^2 + p_5 x_5^2 = 1,2.$$

2.1.17. Найдем математическое ожидание процесса  $\overline{X(t)} = -0,5h + 0,5h = 0$ . Следовательно,  $B_x(t, t+\tau) = \overline{X(t)X(t+\tau)}$ .

Зафиксируем произвольный момент  $t$  (см. рис. 2.1). Интервал, отделяющий точку  $t$  от ближайшей точки, в которой может произойти изменение знака процесса  $X(t)$ , распределен по условию задачи равномерно в промежутке  $(0, T)$ :

$$\omega_1(\Delta t) = 1/T, \quad 0 \leq \Delta t \leq T.$$

Рассмотрим сечение процесса  $X(t)$  в моменты  $t$  и  $t+\tau$  при  $\tau \neq 0$ . Если  $\tau < \Delta t \leq T$ , то  $\overline{X(t)X(t+\tau)} = h^2$ . Если же  $\tau > \Delta t$ , то  $\overline{X(t)X(t+\tau)} = 0,5h^2 - 0,5h^2 = 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} B_x(t, t+\tau) &= p(\tau < \Delta t) h^2 + p(\tau > \Delta t) 0 = \\ &= h^2 \int_0^T \omega_1(\Delta t) d(\Delta t) = h^2 \left(1 - \frac{\tau}{T}\right). \end{aligned}$$

Распространяя это выражение и на  $\tau < 0$ , получаем  $B_x(\tau) = h^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)$ . По формуле (2.10) получим  $\tau_k = T/2$ .

2.1.18. Нормированная корреляционная функция заданного сигнала  $R(\tau) = \exp(-\beta|\tau|)$ . По формуле (2.10) находим  $\tau_k = \int_0^{\infty} \exp(-\beta\tau) d\tau = 1/\beta = 100$  с. Во втором случае  $\tau_k$  находим из условия  $0,1 = \exp(-\beta\tau_k)$ . Отсюда  $\tau_k = -\ln 0,1/\beta \approx 141$  с.

2.1.20. Указание к решению. При определении корреляционной функции винеровского процесса воспользоваться фильтрующим свойством  $\delta$ -функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a).$$

2.1.24. Корреляционная функция АМ-сигнала

$$\begin{aligned} B_{AM}(t, t+\tau) &= \overline{s_{AM}(t) s_{AM}(t+\tau)} = U_m \left[1 + \frac{k_{AM}}{U_m} \dot{X}(t)\right] \times \\ &\times \cos(\omega_0 t + \varphi_0) U_m \left[1 + \frac{k_{AM}}{U_m} \dot{X}(t+\tau)\right] \cos[\omega_0(t+\tau) + \varphi_0] = \\ &= k_{AM}^2 B_x(\tau) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos[\omega_0(t+\tau) + \varphi_0] + \\ &+ U_m^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos[\omega_0(t+\tau) + \varphi_0]. \end{aligned}$$

Усредняя полученное выражение по  $t$ , находим

$$\overset{*}{B}_{AM}(\tau) = \frac{k_{AM}^2}{2} B_x(\tau) \cos \omega_0 \tau + \frac{U_m^2}{2} \cos \omega_0 \tau.$$

В этом выражении первое слагаемое представляет собой корреляционную функцию случайной составляющей АМ-сигнала, а второе — корреляционную функцию несущего колебания.

2.1.25. Для заданного сигнала  $S_{OM}(t)$  определяем

$$\begin{aligned} B_{OM}(t, t+\tau) &= \overline{S_{OM}(t) S_{OM}(t+\tau)} = \\ &= B_x(\tau) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos[\omega_0(t+\tau) + \varphi_0] + B_{\dot{x}}(\tau) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \sin \times \\ &\times [\omega_0(t+\tau) + \varphi_0] - B_{x\dot{x}}(\tau) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \sin[\omega_0(t+\tau) + \varphi_0] - \\ &- B_{\dot{x}x}(\tau) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) [\cos \omega_0(t+\tau) + \varphi_0]. \end{aligned}$$

Осуществляя усреднение по времени, получаем

$$\begin{aligned} \overset{*}{B}_{OM}(\tau) &= 0,5 B_x(\tau) \cos \omega_0 \tau + 0,5 B_{\dot{x}}(\tau) \cos \omega_0 \tau - \\ &- 0,5 B_{x\dot{x}}(\tau) \sin \omega_0 \tau + 0,5 B_{\dot{x}x}(\tau) \sin \omega_0 \tau. \end{aligned}$$

Приняв во внимание, что  $B_{\dot{x}}(\tau) = B_x(\tau)$  и  $B_{x\dot{x}}(\tau) = -B_{\dot{x}x}(\tau)$ , най-

дем  $\overset{*}{B}_{OM}(\tau) = B_x(\tau) \cos \omega_0 \tau - B_{x\dot{x}}(\tau) \sin \omega_0 \tau$ .

2.1.26. Представим ФМ-сигнал соотношением  $S_{FM}(t) = U_m \cos \times [\omega_0 t + k_{FM} \dot{X}(t)]$ .

Корреляционную функцию найдем как

$$\begin{aligned} B_{FM}(t, t+\tau) &= \overline{S_{FM}(t) S_{FM}(t+\tau)} = \\ &= \frac{U_m^2}{2} \{ \cos [2\omega_0 t + \omega_0 \tau + k_{FM} \dot{X}(t) + k_{FM} \dot{X}(t+\tau)] + \\ &+ \cos [\omega_0 \tau - k_{FM} \dot{X}(t) + k_{FM} \dot{X}(t+\tau)] \}. \end{aligned}$$

Выполняя усреднение по времени, получаем

$$\begin{aligned} \dot{B}_{\Phi M}^*(\tau) &= 0,5 U_m^2 \overline{M \{ \cos [\omega_0 \tau - \theta(t, \tau)] \}} = \\ &= 0,5 U_m^2 \cos \omega_0 \tau \overline{M [\cos \theta(t, \tau)]} + \\ &+ 0,5 U_m^2 \sin \omega_0 \tau \overline{M [\sin \theta(t, \tau)]}. \end{aligned}$$

Здесь обозначено  $\Theta(t, \tau) = k_{\Phi M} [\dot{X}(t+\tau) - \dot{X}(t)]$ .

Если одномерное распределение величины  $\Theta(t, \tau)$  является четной функцией, то

$$M [\sin \theta(t, \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sin \theta(t, \tau) \omega_1(\theta) d\theta = 0.$$

Поэтому при гауссовском модулирующем процессе усредненная корреляционная функция ФМ-сигнала

$$\dot{B}_{\Phi M}^*(\tau) = 0,5 U_m^2 \overline{M [\cos \theta(t, \tau)]} \cos \omega_0 \tau.$$

Поскольку величина  $\Theta(t, \tau)$  распределена по гауссовскому закону как линейное преобразование модулирующего сигнала  $\dot{X}(t)$ , для математического ожидания  $\Theta(t, \tau)$ , используя [4], находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \theta \omega_1(\theta) d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}\right) \cos \theta d\theta = \exp\left(-\frac{\sigma_\theta^2}{2}\right).$$

Найдем дисперсию величины  $\Theta(t, \tau)$ . Так как при фазовой модуляции  $\Theta(t, \tau) = k_{\Phi M} [\dot{X}(t+\tau) - \dot{X}(t)]$ , то

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^2 &= k_{\Phi M}^2 \overline{[\dot{X}(t+\tau) - \dot{X}(t)]^2} = k_{\Phi M}^2 \overline{[\dot{X}^2(t+\tau) + \\ &+ \dot{X}^2(t) - 2\dot{X}(t)\dot{X}(t+\tau)]} = 2k_{\Phi M}^2 B_x(0) [1 - R_x(\tau)]. \end{aligned}$$

В этом случае усредненная корреляционная функция модулированного сигнала

$$\dot{B}_{\Phi M}^*(\tau) = 0,5 U_m^2 \cos \omega_0 \tau \exp \{ -k_{\Phi M}^2 B_x(0) [1 - R_x(\tau)] \}.$$

2.1.28. Указание к решению. Для доказательства подставить в (2.14) выражение для  $\omega(x_1; t/x_0; t_0)$  с учетом заданных значений  $m_x(t)$  и  $\sigma_x^2(t)$ .

2.1.29. Указание к решению. Решить уравнение (2.18), используя выражения  $A_1(t)$  и  $A_2(t)$  из задачи 2.1.28.

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 2.2.

2.2.1. Подставив найденное в решении задачи 2.1.17 выражение корреляционной функции случайного синхронного телеграфного сигнала в (2.23), получим

$$G(f) = 2h^2 \int_0^{\infty} (1-\tau/T) \cos \omega \tau d\tau.$$

Интегрируя, находим, что

$$G(f) = h^2 T \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}.$$

Ширину энергетического спектра найдем согласно (2.25), приняв во внимание, что  $G_0(f) = 2G(f)$ :

$$F_0 = \frac{B(0)}{G_{\text{омакс}}} = \frac{h^2}{2h^2 T} = \frac{1}{2T}.$$

Произведение

$$F_0 \tau_k = \frac{1}{2T} \frac{T}{2} = \frac{1}{4}.$$

Отметим, что на частотах, кратных значению  $1/T$ , энергетический спектр синхронного случайного телеграфного сигнала имеет нулевые значения.

2.2.2. В соответствии с (2.24)  $B(\tau) = \frac{1}{2} N_0 \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi f \tau df$ . Так

как  $\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi f \tau df = \delta(\tau)$ , для корреляционной функции белого шума получим  $B(\tau) = 0,5 N_0 \delta(\tau)$ ,  $\sigma^2 = B(0) = \infty$ .

2.2.3. Указание к решению. За  $\tau_k$  принять такое значение  $\tau$ , при котором  $B(\tau)$  впервые становится равной нулю.

2.2.4. Указание к решению. Воспользоваться табличным интегралом

$$\int_0^{\infty} \exp(-\beta\tau) \cos \omega \tau d\tau = \beta / (\beta^2 + 4\pi^2 f^2),$$

а также решением задачи 2.1.18.

2.2.6. Подставляя выражение  $B_y(\tau)$  в (2.23), получаем с учетом четности  $B_y(\tau)$

$$G_y(f) = 2 \int_0^{\infty} B_x(\tau) \cos \omega_0 \tau \cos \omega \tau d\tau.$$

После простых преобразований получим

$$\begin{aligned} G_y(f) &= \int_0^{\infty} B_x(\tau) \cos(\omega - \omega_0) \tau d\tau + \int_0^{\infty} B_x(\tau) \cos(\omega + \\ &+ \omega_0) \tau d\tau = \frac{1}{2} G_x(f - f_0) + \frac{1}{2} G_x(f + f_0). \end{aligned}$$

На положительных частотах

$$G_y(f)_0 = G_x(f - f_0).$$

2.2.8. Для энергетического спектра при ОМ имеем

$$\dot{G}_{\text{ОМ}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} B_x^{\circ}(\tau) \cos \omega_0 \tau e^{-j\omega\tau} d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} B_{x\dot{x}}^{\circ}(\tau) \sin \omega_0 \tau e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

После простых преобразований находим

$$G_{\text{ОМ}}(f) = 0,5 [G_x^{\circ}(f - f_0) + G_x^{\circ}(f + f_0) + jG_{x\dot{x}}^{\circ}(f - f_0) - jG_{x\dot{x}}^{\circ}(f + f_0)].$$

Здесь  $G_{x\dot{x}}^{\circ}(f)$  — взаимный энергетический спектр двух сопряженных процессов. Известно, что

$$G_{x\dot{x}}^{\circ}(f) = \begin{cases} -jG_x^{\circ}(f) & \text{при } f > 0, \\ jG_x^{\circ}(f) & \text{при } f < 0. \end{cases}$$

С учетом этого

$$\dot{G}_{\text{ОМ}}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} [2G_x^{\circ}(f - f_0) + 2G_x^{\circ}(f + f_0)] & \text{при } |f| > |f_0|, \\ 0 & \text{при } |f| < |f_0|. \end{cases}$$

При определении спектра ОМ-сигнала только по положительным частотам

$$G_{\text{ОМ}}^{\circ}(f)_0 = \begin{cases} 2G_x^{\circ}(f - f_0) & \text{при } f > f_0, \\ 0 & \text{при } f < f_0. \end{cases}$$

2.2.9. Усредненной корреляционной функции ФМ-сигнала найденной в задаче 2.1.26, соответствует усредненный энергетический спектр:

$$\dot{G}_{\text{ФМ}}^{\circ}(f) = \frac{U_m^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 \tau \cos \omega \tau \exp \{ -k_{\text{ФМ}}^2 B_x^{\circ}(0) [1 - R_x^{\circ}(\tau)] \} d\tau.$$

Если  $k_{\text{ФМ}}^2 B_x^{\circ}(0) \gg 1$ , то  $R_x^{\circ}(\tau) = B_x^{\circ}(\tau) / B_x^{\circ}(0)$  целесообразно разложить в ряд Маклорена:

$$R_x^{\circ}(\tau) = 1 + \frac{R_x^{\circ(2)}(0) \tau^2}{2!} + \frac{R_x^{\circ(4)}(0) \tau^4}{4!} + \dots$$

Вторая производная  $R_x^{\circ}(\tau) = \frac{1}{B_x^{\circ}(0)} \int_{-\infty}^{\infty} G_x^{\circ}(f) \cos \omega \tau df$  при  $\tau=0$  определяется соотношением

$$R_x^{\circ(2)}(0) = - \frac{(2\pi^2)}{B_x^{\circ}(0)} \int_{-\infty}^{\infty} G_x^{\circ}(f) f^2 df = -a^2.$$

При  $k_{\text{ФМ}}^2 B_x^{\circ}(0) \gg 1$  ненулевые значения

$$\dot{B}_{\text{ФМ}}^{\circ}(\tau) = \frac{U_m^2}{2} \cos \omega_0 \tau \exp [ -k_{\text{ФМ}}^2 B_x^{\circ}(0) + k_{\text{ФМ}}^2 B_x^{\circ}(\tau) ]$$

лежат в области, где  $R_x^{\circ}(\tau) \approx 1$ , т. е.  $\tau \approx 0$ .

Сохраняя поэтому только первые два члена разложения нормированной корреляционной функции, находим

$$\dot{B}_{\text{ФМ}}^{\circ}(\tau) = \frac{U_m^2}{2} \cos \omega_0 \tau \exp \left[ - \frac{k_{\text{ФМ}}^2 B_x^{\circ}(0)}{2} a^2 \tau^2 \right],$$

$$a^2 = \frac{2\pi^2}{B_x^{\circ}(0)} \int_{-\infty}^{\infty} G_x^{\circ}(f) f^2 df.$$

Корреляционной функции гауссовской формы

$$B(\tau) = \exp \left[ - \frac{k_{\text{ФМ}}^2 B(0)}{2} a^2 \tau^2 \right]$$

соответствует энергетический спектр той же формы:

$$G(f) = \sqrt{\frac{2\pi}{k_{\text{ФМ}}^2 B(0) a^2}} \exp \left[ - \frac{2\pi^2 f^2}{k_{\text{ФМ}}^2 B(0) a^2} \right].$$

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 2.3.

2.3.1. Приведем заданный сигнал  $u(t)$  к виду (2.28):

$$z(t) = \frac{U_m}{2} (\cos \omega_0 t \cos \Omega t - \sin \omega_0 t \sin \Omega t + \cos \omega_0 t \cos \Omega t + \sin \omega_0 t \sin \Omega t) = U_m \cos \Omega t \cos \omega_0 t.$$

В этом случае квадратурная компонента  $x(t) = U_m \cos \Omega t$ , а квадратурная компонента  $y(t) = 0$ .

В соответствии с (2.30) имеем для огибающей  $r(t) = |x(t)| = U_m |\cos \Omega t|$  и для мгновенной начальной фазы  $\varphi(t) = \text{arctg } 0 = 0$ . Мгновенная фаза процесса  $u(t)$   $\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) = \omega_0 t$ . Мгновенная частота  $\omega(t) = \frac{d}{dt} \psi(t) = \omega_0$ .

Согласно (2.31) для комплексной огибающей получим

$$\dot{r}(t) = r(t) e^{j\varphi(t)} = r(t) = U_m |\cos \Omega t|.$$

Подставляя это выражение в (2.32), получаем для комплексного сигнала

$$\dot{u}(t) = U_m |\cos \Omega t| \cos \omega_0 t + j U_m |\cos \Omega t| \sin \omega_0 t.$$

2.3.2. Осуществив простые преобразования, приведем процесс к следующему виду:

$$u(t) = U_m \cos \omega_0 t - \frac{\beta U_m}{2} \cos \Omega t \cos \omega_0 t +$$

$$+ \frac{\beta U_m}{2} \sin \Omega t \sin \omega_0 t + \frac{\beta U_m}{2} \cos \Omega t \cos \omega_0 t +$$

$$+ \frac{\beta U_m}{2} \sin \Omega t \sin \omega_0 t = U_m \cos \omega_0 t + \beta U_m \sin \Omega t \sin \omega_0 t.$$

В соответствии с (2.29) имеем для квадратурных компонент  $x(t) = U_m$ ;  $y(t) = \beta U_m \sin \Omega t$ .

По формулам (2.30) находим огибающую

$$r(t) = \sqrt{U_m^2 + \beta^2 U_m^2 \sin^2 \Omega t} = U_m \sqrt{1 + \beta^2 \sin^2 \Omega t}$$

и мгновенную начальную фазу  $\varphi(t) = \arctg(\beta \sin \Omega t)$ . Мгновенная фаза  $\psi(t) = \omega_0 t + \arctg(\beta \sin \Omega t)$ . Мгновенная частота

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \psi(t) = \omega_0 + \frac{\beta \Omega \cos \Omega t}{1 + \beta^2 \sin^2 \Omega t}.$$

В соответствии с (2.32) комплексный сигнал

$$\tilde{u}(t) = U_m \sqrt{1 + \beta^2 \sin^2 \Omega t} \cos[\omega_0 t + \arctg(\beta \sin \Omega t)] +$$

$$+ j U_m \sqrt{1 + \beta^2 \sin^2 \Omega t} \sin[\omega_0 t + \arctg(\beta \sin \Omega t)].$$

2.3.3. Относительно частоты  $\omega_0$  сигнал

$$z(t) = \sum_{l=1}^L u_l \cos(\omega_0 + \Omega_l) t = \cos \omega_0 t \sum_{l=1}^L u_l \cos \Omega_l t -$$

$$- \sin \omega_0 t \sum_{l=1}^L u_l \sin \Omega_l t.$$

Квадратурные компоненты сигнала  $z(t)$  определяются соотношениями

$$x(t) = \sum_{l=1}^L u_l \cos \Omega_l t; \quad y(t) = \sum_{l=1}^L u_l \sin \Omega_l t.$$

Для огибающей по формуле (2.30) получим выражение

$$r(t) = \sqrt{\left(\sum_{l=1}^L u_l \cos \Omega_l t\right)^2 + \left(\sum_{l=1}^L u_l \sin \Omega_l t\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{l=1}^L u_l^2 + \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^L u_l u_k \cos(\Omega_l - \Omega_k) t, \quad k \neq l.}$$

Мгновенная начальная фаза

$$\varphi(t) = \arctg \frac{\sum_{l=1}^L u_l \sin \Omega_l t}{\sum_{l=1}^L u_l \cos \Omega_l t}.$$

Мгновенная частота

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{d}{dt} [\varphi(t)] = \omega_0 +$$

$$+ \frac{\sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^L \Omega_l u_l u_k \cos(\Omega_l + \Omega_k) t}{\sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^L u_l u_k \cos(\Omega_l - \Omega_k) t}.$$

Сопряженный сигнал рассчитывается по формуле (2.32):

$$\tilde{z}(t) = \sqrt{\sum_{l=1}^L u_l^2 + \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^L u_l u_k \cos(\Omega_l - \Omega_k) t} \times$$

$$\times \sin \left( \omega_0 t + \arctg \frac{\sum_{l=1}^L u_l \sin \Omega_l t}{\sum_{l=1}^L u_l \cos \Omega_l t} \right).$$

2.3.7. Согласно (2.34)  $\tilde{z}_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\cos \omega_0 \tau}{t - \tau} d\tau.$

Введя переменную  $t - \tau = x$ , получим

$$z_1(t) = \frac{U_m}{\pi} \cos \omega_0 t \int_{t-T/2}^{t+T/2} \frac{\cos \omega_0 x}{x} dx +$$

$$+ \frac{U_m}{\pi} \sin \omega_0 t \int_{t-T/2}^{t+T/2} \frac{\sin \omega_0 x}{x} dx.$$

При  $T \rightarrow \infty$  первый интеграл от нечетной функции в бесконечных пределах обращается в нуль, а второй равен  $\pi$  [4]. Следовательно,  $\tilde{z}_1(t) = U_m \sin \omega_0 t$  при  $T \rightarrow \infty$ . Аналогично можно показать, что при  $T \rightarrow \infty$   $\tilde{z}_2(t) = -U_m \cos \omega_0 t$ . Соотношение  $S_{\tilde{z}}(j\omega) = jS_z(j\omega)$  при  $f > 0$  (см. формулу (2.36)) означает, что любую спектральную составляющую сопряженного сигнала на положительной частоте можно получить из соответствующей компоненты самого сигнала путем фазового сдвига на  $\pi/2$ . Следовательно, при  $T \rightarrow \infty$

$$\tilde{z}_1(t) = U_m \cos \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) = U_m \sin \omega_0 t,$$

$$\tilde{z}_2(t) = U_m \sin \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) = -U_m \cos \omega_0 t.$$

2.3.8. Заданному спектру соответствует согласно (2.37) комплексный сигнал

$$z(t) = 2 \int_{F_1}^{F_2} e^{j\omega t} df = \frac{\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t}{\pi t} - j \frac{\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t}{\pi t}.$$

Согласно (2.32)

$$z(t) = \operatorname{Re} \dot{z}(t) = \frac{\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t}{\pi t}; \quad \tilde{z}(t) = \operatorname{Im} \dot{z}(t) = \\ = -\frac{\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t}{\pi t}.$$

Воспользовавшись (2.35), получим для огибающей и мгновенной фазы:

$$r(t) = \frac{1}{\pi|t|} \sqrt{(\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t)^2 + (\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t)^2} = \\ = \frac{1}{\pi|t|} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t} = \frac{2}{\pi} \left| \frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2} t}{t} \right|; \\ \varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{-(\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t)}{\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t.$$

2.3.9. При симметричных квадратурных компонентах, усредняя (2.39) по  $\varphi$ , находим

$$\omega_1(r) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \exp \left[ -\frac{(r \cos \varphi - m_x)^2 - (r \sin \varphi - m_y)^2}{2\sigma^2} \right] d\varphi, \quad r \geq 0,$$

Осуществив простые преобразования, получим

$$\omega_1(r) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp \left( -\frac{r^2 + m_x^2 + m_y^2}{2\sigma^2} \right) \times \\ \times \int_0^{2\pi} \exp \left[ \frac{r \sqrt{m_x^2 + m_y^2}}{\sigma^2} \cos(\varphi - \varphi_p) \right] d\varphi, \quad r \geq 0,$$

где  $\varphi_p = \operatorname{arctg} \frac{m_y}{m_x}$ .

Введем переменную  $u = \varphi - \varphi_p$  и обозначим  $\sqrt{m_x^2 + m_y^2} = \alpha_p$ . В этом случае можно записать

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[ \frac{r\alpha_p}{\sigma^2} \cos(\varphi - \varphi_p) \right] d\varphi = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi_p}^{2\pi - \varphi_p} e^{\frac{r\alpha_p}{\sigma^2} \cos u} du = I_0 \left( \frac{\alpha_p r}{\sigma^2} \right).$$

Здесь  $I_0(z)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Таким образом,

$$\omega_1(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp \left( -\frac{r^2 + \alpha_p^2}{2\sigma^2} \right) I_0 \left( \frac{\alpha_p r}{\sigma^2} \right), \quad r \geq 0.$$

2.3.10. Указание к решению. Учтеть, что  $I_0(0) = 1$ .

2.3.11. Условие  $m_x = \sigma_x^2 = 0$  означает, что процесс  $Z(t)$  можно представить в виде  $Z(t) = Y(t) \sin \omega_0 t$ . Но тогда его огибающая согласно (2.30)  $R(t) = |Y(t)|$ . Поскольку  $m_y = 0$ , плотность вероятности квадратурной компоненты  $Y(t)$  имеет вид

$$\omega_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp \left( -\frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right), \quad -\infty < y < \infty.$$

Эта функция относительно  $y$  четная, поэтому конкретному значению модуля  $r = |y| \geq 0$  могут соответствовать значения  $y = r_1$  и  $y = -r_1$ , имеющие одинаковые плотности вероятности. С учетом сказанного получаем искомое распределение для огибающей.

2.3.12. Двумерная плотность вероятности огибающей и фазы узкополосного гауссовского случайного процесса при  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$  и  $m_x, m_y \neq 0$  определяется соотношением (2.39), откуда

$$\omega_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty r \exp \left[ -\frac{(r \cos \varphi - m_x)^2 + (r \sin \varphi - m_y)^2}{2\sigma^2} \right] dr.$$

После простых преобразований получаем

$$\omega_1(\varphi) = \frac{\exp \left( -\frac{\alpha_p^2}{2\sigma^2} \right)}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty r \exp \left[ -\frac{r^2 - 2\alpha_p r \cos(\varphi - \varphi_p)}{2\sigma^2} \right] dr,$$

где  $\alpha_p = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$  и  $\varphi_p = \operatorname{arctg} \frac{m_y}{m_x}$ .

Дополняя показатель экспоненты в подынтегральной функции до полного квадрата и вводя функцию Лапласа

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp \left( -\frac{t^2}{2} \right) dt,$$

находим

$$\omega_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \exp \left( -\frac{\alpha_p^2}{2\sigma^2} \right) + \frac{\alpha_p \cos(\varphi - \varphi_p)}{\sqrt{2\pi}\sigma} F \times \\ \times \left[ \frac{\alpha_p}{\sigma} \cos(\varphi - \varphi_p) \right] \exp \left( -\frac{\alpha_p^2 \sin^2(\varphi - \varphi_p)}{2\sigma^2} \right), \quad |\varphi - \varphi_p| \leq \pi.$$

При  $m_x = m_y = 0$  следует равномерное распределение для фазы в интервале  $(0, 2\pi)$ :  $\omega_1(\varphi) = 1/(2\pi)$ .

2.3.14. Указание к решению. Воспользоваться асимптотикой  $I_0(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} (1 + \frac{1}{8z} + \dots)$  и ограничиться двумя первыми слагаемыми.

2.3.15. При  $\varphi - \varphi_p \leq \pi/60$  можно считать  $\cos(\varphi - \varphi_p) \approx 1$ ,  $\sin(\varphi - \varphi_p) \approx \varphi - \varphi_p$ . Если, кроме того,  $\alpha_p/\sigma > 3$ , то  $\exp[-\alpha_p^2/(2\sigma^2)] \approx$



$\approx 0$ , а функция Лапласа  $F[(\alpha_p/\sigma) \cos(\varphi - \varphi_p)] \approx 1$ . В этих условиях из результата задачи 2.3.12 следует

$$\omega_1(\varphi) = \frac{\alpha_p}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha_p^2 (\varphi - \varphi_p)^2}{2\sigma^2}\right),$$

т. е. закон распределения фазы является гауссовским с математическим ожиданием  $\varphi_p$  и дисперсией  $(\sigma/\alpha_p)^2$ .

#### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 2.4.

2.4.1. Норму вектора  $\mathbf{s}$  в  $n$ -мерном пространстве Эвклида найдем по формуле (2.41). В данном случае коэффициенты ряда Фурье, представляющего сигнал  $s(t)$ , есть не что иное, как координаты сигнала  $s(t)$  в пространстве, координатный базис которого образован функциями вида  $\sqrt{2} \cos(2k\pi t/T)$  и  $\sqrt{2} \sin(2k\pi t/T)$ . Поэтому

$$\|\mathbf{s}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^L (a_k^2 + b_k^2)}; \quad \|\mathbf{s}\|^2 = \sum_{k=1}^L (a_k^2 + b_k^2),$$

где  $a_k^2$  и  $b_k^2$  — квадраты эффективных значений  $k$ -х членов разложения сигнала  $s(t)$ . Это есть средняя мощность соответствующих слагаемых ряда. Сумма средних мощностей всех членов ряда дает полную среднюю мощность сигнала  $s(t)$ . Таким образом, квадрат нормы вектора имеет смысл средней мощности, а норма — смысл эффективного значения сигнала.

2.4.3. Представим сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  в виде

$$s_1(t) = \sum_{k=1}^{2FT} s_1(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta t)}{2\pi F(t - k\Delta t)},$$

$$s_2(t) = \sum_{k=1}^{2FT} s_2(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta t)}{2\pi F(t - k\Delta t)}.$$

В координатном базисе  $\{g_k(t)\} = \left\{ \frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta t)}{2\pi F(t - k\Delta t)} \right\}$

координатами сигналов будут отсчеты  $s(k\Delta t)$ . В соответствии с (2.40) находим  $s_{\Sigma}(t) = s_1(k\Delta t) + s_2(k\Delta t)$ .

Норма суммарного сигнала по формуле (2.41)

$$\|s_{\Sigma}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{2FT} [s_1^2(k\Delta t) + s_2^2(k\Delta t) + 2s_1(k\Delta t)s_2(k\Delta t)]}.$$

Величина  $\sum_{k=1}^{2FT} s_1(k\Delta t)s_2(k\Delta t)$  есть скалярное произведение сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ . Оно равно нулю, так как по условию задачи сигналы ортогональны. Поэтому

$$\|s_{\Sigma}\| = \sqrt{\|s_1\|^2 + \|s_2\|^2}.$$

Расстояние между сигналами по (2.46)

$$d(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{2FT} [s_1(k\Delta t) - s_2(k\Delta t)]^2} = \|\mathbf{s}_{\Sigma}\|.$$

2.4.4. Указания к решению. Выбрать в качестве координатного базиса совокупность функций

$$\varphi_1(t) = \sqrt{2} \cos[(2\pi/T)t]; \quad \varphi_2(t) = \sqrt{2} \sin[(2\pi/T)t];$$

$$\varphi_3(t) = \sqrt{2} \sin[(4\pi/T)t]; \quad \varphi_4(t) = \sqrt{2} \cos[(6\pi/T)t];$$

$$\varphi_5(t) = \sqrt{2} \sin[(6\pi/T)t].$$

Воспользоваться формулами (2.46) и (2.43).

2.4.6. Проверим первое условие (2.51):

$$\frac{1}{T} \int_0^T a^2 \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t + \varphi_1\right) \cos\left(l \frac{2\pi}{T} t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{a^2}{2T} \left\{ \frac{T}{(k+l)2\pi} \sin\left[(k+l)2\pi + 2\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right] - \right.$$

$$- \frac{T}{(k+l)2\pi} \sin(2\varphi_1 + \pi/2) + \frac{T}{(k-l)2\pi} \sin[(k-l)2\pi - \pi/2] -$$

$$\left. - \frac{T}{(k-l)2\pi} \sin \pi/2 \right\} = 0, \quad k \neq l.$$

Следовательно, сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  согласно (2.50) являются ортогональными.

Теперь проверим второе условие (2.51):

$$\frac{1}{T} \int_0^T s_1(t) \tilde{s}_1(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T a^2 \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t + \varphi_1\right) \times$$

$$\times \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t + \varphi_1\right) dt = 0.$$

Аналогично

$$\frac{1}{T} \int_0^T s_1(t) \tilde{s}_2(t) dt = 0.$$

Следовательно, сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  являются ортогональными в усиленном смысле.

Расстояние между сигналами  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  найдем по формуле (2.46):  $d(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = a$ .

2.4.9. Указание к решению. Принять во внимание, что число сигналов ортогональной системы равно ее базе  $B$ . Число возможных сигналов в биортогональной системе равно  $2B$ , а в ортогональной в усиленном смысле системе —  $B/2$ .

2.4.12. На рис. P.2.2,a показаны сигналы  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  и  $s_3(t)$  в виде точек некоторого пространства. Эти точки представляют собой вершины некоторого треугольника  $ABC$ . Для сторон треуголь-

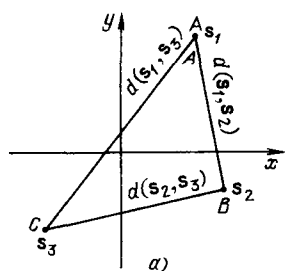


Рис. P.2.2 К решению задачи 2.4.12

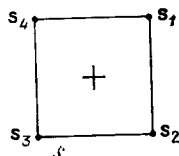
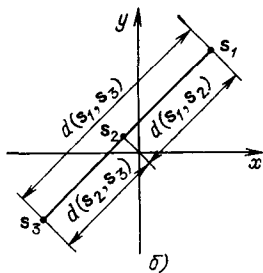


Рис. P.2.3 Двумерный ансамбль биортогональных сигналов

ника справедливо соотношение  $AC \leq AB + BC$  (условие треугольника). Длина отрезка  $AC$  равна норме вектора разности сигналов  $s_1(t)$  и  $s_3(t)$ :

$$AC = \|s_1 - s_3\| = d(s_1, s_3).$$

Аналогично  $AB = d(s_1, s_2)$  и  $BC = d(s_2, s_3)$ . Следовательно,  $d(s_1, s_3) \leq d(s_1, s_2) + d(s_2, s_3)$ , причем равенство достигается только в том случае, когда все три сигнала лежат на одной прямой (рис. P.2.2, б).

2.4.13. Указание к решению. Воспользоваться соотношениями (2.51).

2.4.14. При  $M=4$  биортогональный ансамбль сигналов является простейшим. Сигналы имеют одинаковые энергии и находятся на одинаковом расстоянии от начала координат. При заданных базисных функциях сигналы искомого ансамбля согласно (2.47) имеют вид

$$s_1(t) = \sqrt{2E/T} \cos(\omega_0 t + \pi/4); \quad s_2(t) = \sqrt{2E/T} \cos(\omega_0 t - \pi/4);$$

$$s_3(t) = \sqrt{2E/T} \cos(\omega_0 t - 3\pi/4); \quad s_4(t) = \sqrt{2E/T} \cos(\omega_0 t + 3\pi/4).$$

Эти сигналы на плоскости образуют квадрат (рис. P.2.3). Согласно (2.46) расстояние между ближайшими сигналами этого ансамбля  $\sqrt{2E/T}$ , а между противоположными —  $2\sqrt{E/T}$ .

2.4.18. Найдем расстояния между заданными комбинациями  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  по формуле (2.53):  $d(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \sum_{i=1}^8 (x_{1i} \oplus x_{2i}) = 5$ ;  $d(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3) = 6$ ;  $d(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = 5$ .

Легко заметить, что  $d(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3) < d(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) + d(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ , так как,  $6 < 5 + 5$ . Аналогично  $d(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) < d(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) + d(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3)$ , так как  $5 < 6 + 5$ ,  $d(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) < d(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) + d(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3)$ , так как  $5 < 6 + 5$ .

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 2.5.

2.5.1. Найдем сначала спектральную плотность колокольного импульса

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-\beta^2 t^2} e^{-j\omega t} dt = \\ = (a \sqrt{\pi}/\beta) \exp(-0,5 \omega^2/\beta^2).$$

Поскольку полоса пропускания фильтра имеет величину  $F$ , определим по формуле (2.56) относительную погрешность представления колокольного импульса рядом Котельникова:

$$\delta_y = \frac{\int_F^{\infty} \exp(-0,5 \omega^2/\beta^2) df}{\int_0^{\infty} \exp(-0,5 \omega^2/\beta^2) df}.$$

Умножая числитель и знаменатель этого выражения на  $1/\sqrt{2\pi\beta^2}$  и принимая во внимание, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2}} \int_0^{\infty} \exp(-0,5 \omega^2/\beta^2) df = 0,25/\pi,$$

находим

$$\delta_y = 2\pi [1 - \Phi(2\pi F/\beta)],$$

где  $\Phi(z)$  — функция Крампа.

Если  $\delta_y = 10\%$ , то из уравнения  $0,1 = 2\pi [1 - \Phi(2\pi F/\beta)]$  определяем по таблицам аргумент функции Крампа:  $2\pi F/\beta = 2,4$ . При  $\beta = 20$  и  $F = 24/\pi$  Гц интервал дискретизации в соответствии с (2.54)  $\Delta t = \pi/48 = 6,56 \cdot 10^{-2}$  с.

2.5.2. С учетом решения задачи 2.2.1 по формуле (2.57) находим

$$\delta_y = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin^2(\pi FT)}{\pi FT} + 0,5\pi - \text{Si}(2\pi FT) \right],$$

где  $\text{Si}(x) = \int_0^x \sin y/ y dy$  — интегральный синус. При  $F = F_3$ , учитывая, что  $F_3 T = 0,5$ , получаем

$$\delta_y = 2[2/\pi + 0,5\pi - \text{Si}\pi]/\pi = 0,23.$$

Если  $F = F_3$ , то  $\delta_y = 2(0,5\pi - \text{Si}2\pi)/\pi = 0,096$ .

2.5.6. Энергетический спектр этого случайного процесса

$$G(f) = 2aB(0)/(a^2 + \omega^2).$$

При ограничении полосы такого спектра частотой  $F$  определим погрешность усечения согласно (2.57):

$$\delta_y = 1 - (2/\pi) \arctg(2\pi F/a).$$

Подставив сюда согласно (2.54)  $F = 0,5/\Delta t$ , найдем

$$\delta_y = 1 - (2/\pi) \arctg(\pi/a\Delta t).$$

2.5.8. В соответствии с (2.63) при заданной нормированной корреляционной функции

$$\Delta_T = -10 \ln(1 - 0,5\delta_b).$$

Если  $\delta_b = 0,01$ , то  $\Delta_T = 0,05$  с.

При дискретизации по Котельникову, используя результат задачи 2.5.6, получаем

$$\Delta t = 10\pi / \operatorname{tg} 0,5(1 - \delta_y)\pi.$$

Для заданной величины  $\delta_y = 0,01$   $\Delta t = 0,523$  с.

2.5.9. В соответствии с (2.62) можно написать уравнение

$$\exp(-\beta^2 \Delta^2 T) = 1 - 0,5\delta_b,$$

откуда  $\Delta_T = \beta^{-1} \sqrt{-\ln(1 - 0,5\delta_b)}$ .

### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГЛАВЫ 3

#### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 3.1.

3.1.4. Под ошибкой кратности  $q$  понимают событие, состоящее в том, что какие-либо  $q$  символов из  $n$  переданных приняты ошибочно, а остальные  $n - q$  символов приняты правильно. Вероятность такого события в рассматриваемом канале  $p_0^q (1 - p_0)^{n - q}$ .

Так как  $q$  ошибок в цепочке из  $n$  символов могут появиться во взаимно несовместимых случаях, по правилу сложения вероятностей получаем  $P(q) = C_n^q p_0^q (1 - p_0)^{n - q}$ .

3.1.6. Используя результат задачи 3.1.4, находим  $\bar{q} = \sum_{q=1}^n C_n^q \times \times p_0^q (1 - p_0)^{n - q} q$ . (Суммирование выполнено от  $q=1$ , так как при  $q=0$  член суммы равен нулю).

Поскольку  $C_n^q = C_{n-1}^{q-1} n/q$ ,  $\bar{q} = np_0 \sum_{q=1}^n C_{n-1}^{q-1} p_0^{q-1} (1 - p_0)^{n-1-(q-1)} = = np_0 \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r p_0^r (1 - p_0)^{n-1-r}$ .

Последняя сумма, представляющая собой сумму вероятностей полной группы событий, равна единице. Следовательно,  $\bar{q} = np_0$  и  $P(q) \approx C_n^q p_0^q$ , если принять  $(1 - p_0)^{n - q} \approx 1$ . Покажем, что при  $np_0 \ll 1$  это имеет место. Рассмотрим величину  $(1 - p_0)^n$ . При  $np_0 \ll 1$   $(1 - p_0)^n = (1 - np_0/n)^n = \exp(-np_0) \approx 1$ . Поскольку  $n - q \leq \leq n$ , то и  $(1 - p_0)^{n - q} \approx 1$ .

3.1.7. Указание к решению. Воспользоваться формулой (3.2).

3.1.9. Указание к решению. Формулы для  $p_{\text{прав}}$ ,  $p_{\text{ош}}$  и  $p_{\text{ст}}$  следуют из определения искомых характеристик, если принять, что символу стирания на выходе канала «?» присвоен номер  $j = m'$ , а ошибка при передаче символов имеет место, если номера символов на передаче и приеме не совпадают ( $i \neq j \neq m'$ ).

3.1.10. Указание к решению. Воспользоваться решением задачи 3.1.9.

3.1.12. Если предшествующий символ принят ошибочно с вероятностью  $p_{\text{ош}}$ , то возникает ошибка с вероятностью  $p_2$ . Если же предшествующий символ принят правильно с вероятностью  $1 - p_{\text{ош}}$ , то возникает ошибка с вероятностью  $p_1$ . Таким образом, средняя вероятность ошибки удовлетворяет уравнению  $p_{\text{ош}} = p_{\text{ош}} p_2 + + (1 - p_{\text{ош}}) p_1$ , откуда  $p_{\text{ош}} = p_1 / (1 + p_1 - p_2)$ .

Если  $p_2 > p_1$ , то ошибочно принятые символы с большей вероятностью предопределяют ошибочный прием следующего символа. В этом случае  $p_2 > p_{\text{ош}} < 0,5$  и ошибки в канале группируются.

Если же  $p_2 < p_1$ , то после ошибочно принятого символа с большей вероятностью следующий символ будет принят правильно. При этом  $p_2 < p_{\text{ош}}$ , т. е. в канале происходит рассредоточение ошибок.

3.1.16. Поскольку нормальный шум в анализируемых дискретных сечениях не коррелирован, а следовательно, и независим, то его совместная ( $n = T/\Delta t = 2FT$ )-мерная плотность вероятности

$$\omega_n(n) = (1/\sqrt{2\pi N_0 F})^n \exp \left\{ - \left[ \sum_{i=1}^n n^2(t_i) \right] / (2N_0 F) \right\},$$

где  $N_0 F = \sigma^2$  — дисперсия шума. Поэтому функции правдоподобия

$$\omega(z|s_1) = (2\pi N_0 F)^{-0,5n} \times \times \exp \left\{ - \frac{\sum_{i=1}^n \{z(t_i) - k(t_i) a \cos [\omega_0(t_i - \tau(t_i) + \varphi_0)]\}^2}{2N_0 F} \right\},$$

$$\omega(z|s_2) = (2\pi N_0 F)^{-0,5n} \times \times \exp \left\{ - \frac{\sum_{i=1}^n \{z(t_i) + k(t_i) a \cos [\omega_0(t_i - \tau(t_i) + \varphi_0)]\}^2}{2N_0 F} \right\}.$$

3.1.18. Используя формулу Байеса (3.2), видим, что система неравенств  $P(b_i|z) > P(b_j|z)$ ,  $i \neq j$  равносильна другой системе неравенств:  $P(b_i) \omega(z|b_i) > P(b_j) \omega(z|b_j)$ ,  $i \neq j$ .

3.1.19. При точно известном сигнале с учетом (3.5) функционал правдоподобия

$$\omega(z|u_i) = K \exp \left[ - \frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - k \cos \theta u_i(t) + k \sin \theta \tilde{u}_i(t)]^2 dt \right] = = K_1 \exp \left[ \frac{2}{N_0} (\cos \theta Y_i + \sin \theta \tilde{Y}_i - 0,5 k^2 E_i) \right],$$

где  $K_1 = \exp \left[ - \frac{1}{N_0} \int_0^T z^2(t) dt \right]$  — константа, не зависящая от  $i$ ;

$$Y_i(t) = \int_0^T z(t) u_i(t) dt; \quad \tilde{Y}_i(t) = \int_0^T z(t) \tilde{u}_i(t) dt; \quad E_i = \int_0^T u_i^2(t) dt = \int_0^T \tilde{u}_i^2(t) dt$$

— энергия элемента сигнала. Здесь учтено условие ортогональности сигналов  $u_i(t)$  и  $\tilde{u}_i(t)$  на интервале  $(0, T)$ .

Усредняя  $\omega(z|u_i)$  по  $\Theta$ , при  $\omega(\Theta) = 0,5/\pi$ ,  $-\pi \leq \Theta \leq \pi$  получаем функционал правдоподобия при неопределенной фазе сигнала:

$$\omega(z|u_i) = K_1 \exp(-0,5k^2 E_i) I_0(2kV_{\tilde{u}}/N_0),$$

где

$$V_i = \sqrt{\left[ \int_0^T z(t) u_i(t) dt \right]^2 + \left[ \int_0^T z(t) \tilde{u}_i(t) dt \right]^2}.$$

### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 3.2.

3.2.1. На рис. Р.3.1 показано несколько реализаций импульсной переходной характеристики линейного канала с переменными параметрами. Если свойства канала не меняются во времени (канал с постоянными параметрами), то реализации упомянутой характеристики не должны зависеть от параметра  $t$ , т. е.  $g(t, \tau) = g(\tau)$ . Это означает, что реакция канала с постоянными параметрами на  $\delta$ -импульс зависит лишь от интервала между моментом наблюдения  $t$  и моментом подачи сигнала на вход канала  $t-\tau$ . Если  $g(t, \tau) = g(\tau)$ , то, как следует из (3.10), передаточная функция канала от времени не зависит.

3.2.2. Указание к решению. Подставив  $g(t, \tau)$  в формулу (3.6), учесть фильтрующее свойство  $\delta$ -функции.

3.2.3. Передаточная функция заданной модели канала (см. рис. 3.2)  $K(j\omega) = (1 + j2\pi fCR)^{-1}$ . Такой передаточной функции соответствует переходная характеристика  $g(\tau) = (RC)^{-1} \exp(-\tau/RC)$ ,  $\tau \geq 0$ , что вытекает из (3.10).

По методу равновеликого прямоугольника (3.8) находим интервал рассеяния  $\tau_p = \int_0^{\infty} \exp(-\tau/RC) d\tau = RC$ , который в данном случае определяется постоянной времени цепи. Если  $R = 100$  Ом и  $C = 100$  мкф, то  $\tau_p = 10$  мс.

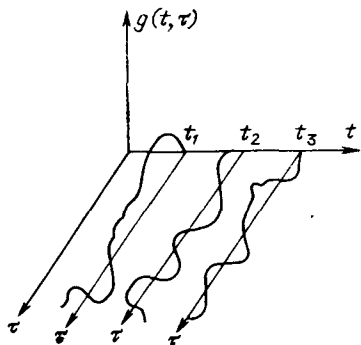


Рис Р31 Реализации импульсных переходных характеристик линейного канала со случайно меняющимися параметрами

3.2.5. Указание к решению. Воспользоваться известным определением  $\delta$ -функции:

$$\delta(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jx\omega) d\omega.$$

3.2.6. Заданной передаточной функции соответствует спектр мощности

$$S^2(\omega) = (4\pi\alpha)^{-1} \exp(-\omega^2/\alpha^2).$$

Пользуясь методом равновеликого прямоугольника, определяем интервал частотного рассеяния

$$F_p = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} \exp(-\omega^2/\alpha^2) d\omega = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} \int_0^{\infty} \exp(-0,5\omega^2/\alpha^2) d\omega.$$

Отсюда, используя условие нормировки для гауссовского закона распределения, находим  $F_p = 0,5\alpha/\sqrt{2\pi}$ .

3.2.8. Интервал рассеяния во времени

$$\tau_p = \int_0^{\infty} \exp(-a_1\tau) d\tau = 1/a_1.$$

Функции  $e^{-a_1t}$  соответствует квадрат модуля амплитудного спектра по Фурье (спектр мощности)

$$S^2(\omega) = (a_2^2 + \omega^2)^{-1}.$$

Интервал частотного рассеяния

$$F_p = \int_0^{\infty} [1 + (\omega/a_2)^2]^{-1} d\omega.$$

После интегрирования получим  $F_p = 0,25a_2$ . Коэффициент рассеяния канала  $k_p = \tau_p F_p = 0,25a_2/a_1$ .

3.2.10. Запишем входной сигнал в комплексном виде  $\dot{u}(t) = U_m e^{j\omega t}$ , где  $U_m = U_m e^{j\varphi_0}$ .

Воспользовавшись (3.7) и (3.10), представим выходной сигнал в комплексном виде:

$$\dot{s}(t) = U_m e^{j\omega t} \int_0^{\infty} g(t, \tau) d\tau = k(\omega, t) U_m \cos[\omega t + \varphi(\omega, t) + \varphi_0] + jk(\omega, t) U_m \sin[\omega t + \varphi(\omega, t) + \varphi_0].$$

Действительная часть этого выражения определяет выходной сигнал:

$$s(t) = k(\omega, t) U_m \cos[\omega t + \varphi(\omega, t) + \varphi_0].$$

Заменив в соотношении для  $s(t)$   $U_m$  огибающей  $A(t)$ , а  $\varphi_0$  — фазой  $\Theta(t)$ , получим  $A'(t) = kA(t)$ ,  $\Theta'(t) = \Theta(t) + \varphi$ .

3.2.11. Результат для  $g(t, \tau)$  следует из структуры многолучевой модели (см. рис. 3.3).

Оуществив преобразование Фурье над заданной переходной характеристикой  $g(t, \tau)$ , с учетом фильтрующего свойства  $\delta$ -функции получим  $K(j\omega, t) = \sum_{i=1}^n k_i(t) \exp(-j\omega\tau_i(t))$ . Подставив выражение для  $g(t, \tau)$  в (3.7), находим

$$s(t) = \sum_{i=1}^n k_i(t) u[t - \tau_i(t)].$$

3.2.15. Указание к решению. Принять во внимание, что при полной коррекции характеристик канала в заданной полосе частот выполняется условие

$$K(j\omega)K(j\omega)_{\text{кор}} = B_0 \exp(-j2\pi f b), \quad 0 \leq f \leq F_{\text{макс}}.$$

3.2.17. Очевидно, что максимальный уровень входного воздействия удовлетворяет уравнению

$$\frac{|s(u_{\text{макс}}) - 0,1 u_{\text{макс}}|}{0,1 |u_{\text{макс}}|} = \frac{0,3 |u_{\text{макс}}|^3}{0,1 |u_{\text{макс}}|} = 3 |u_{\text{макс}}|^2 = 0,03.$$

Отсюда  $|u_{\text{макс}}| = 0,1$  В.

### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 3.3.

3.3.1. Согласно (3.13) плотность вероятности реализации отрезков флуктуационного шума с энергией  $E_{\text{ш}}$  можно представить так:  $w_1(u_T) = K \exp(-E_{\text{ш}}/N_0)$ . Если  $E_{\text{ш}} = 0$ , то  $w_1(u_T) = K$ . Отношение этих величин определяет искомый результат.

3.3.2. Средняя мощность теплового шума  $P_{\text{ш}} = 4kTF_c$ , где  $k = 1,37 \cdot 10^{-23}$  Дж/град — постоянная Больцмана. Следовательно,  $\frac{P_c}{P_{\text{ш}}} = \frac{1}{2} \frac{\bar{A}^2}{4kTF_c}$ , так как  $P_c = \bar{A}^2/2$ .

3.3.4. Искомая вероятность  $p_{\text{ф.п}}$  определяется вероятностью выполнения неравенства  $A_{\text{ш}} > A_{\text{пор}} = \sqrt{4P_c}$ . Огибающая шума  $A_{\text{ш}}$  имеет распределение Рэлея:

$$w_1(A_{\text{ш}}) = (A_{\text{ш}}/P_{\text{ш}}) \exp(-A_{\text{ш}}^2/(2P_{\text{ш}})), \quad P_{\text{ш}} = 2N_0\Delta f.$$

Таким образом,

$$p_{\text{ф.п}} = \int_{\sqrt{4P_c}}^{\infty} w_1(A_{\text{ш}}) dA_{\text{ш}} = \exp(-P_c/(N_0\Delta f)) = 0,135.$$

3.3.7. Вероятность  $p_{c.n} = kv_{c.n}F$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности. Если среднее число сосредоточенных помех  $v_{c.n}$  в единичной полосе пропорционально  $P_{\text{пор}}$ , то вероятность появления сосредоточенной помехи  $p_{c.n}$ , превышающей пороговый уровень, остается неизменной, когда величина  $P_{\text{пор}}$  обратно пропорциональна полосе  $F$ .

3.3.8. Средняя вероятность ошибки параллельного модема

$$p_{\text{пар}} = \sum_{k=1}^n p_k,$$

где  $p_k$  — вероятность ошибки в каждом частотном канале. Средняя же вероятность ошибки последовательного модема определяется вероятностью ошибки элемента сигнала  $p_{\text{посл}} = p_0$ . Вероятности ошибки  $p_k$  и  $p_0$  определяются отношением сигнал-сосредоточенная помеха в обоих модемах.

Для параллельного модема отношением сигнал-сосредоточенная помеха в каждом частотном канале  $(P_c/P_{c.n})_{\text{пар}} = P_{\text{пер}}/nP_{c.n}$ , в то время как  $(p_c/p_{c.n})_{\text{посл}} = P_{\text{пер}}/P_{c.n}$ . Попад в полосу  $k$ -го индивидуального канала параллельного модема при  $(P_c/P_{c.n})_{\text{пар}} < 1$ , помеха обуславливает в этом канале значение  $p_k \approx 1/2$  и, следовательно,  $p_{\text{пар}} \approx 0,5$ , если даже по остальным частотным каналам вероятность ошибки близка к нулю. В последовательном же модеме помеха той же интенсивности обеспечивает значение  $(P_c/P_{c.n})_{\text{посл}} = n(P_c/P_{c.n})_{\text{пар}}$ , которое при больших  $n$  может оказаться явно недостаточным для существенного понижения верности связи.

3.3.9. Вероятность ошибки  $p_0 = 1 - q = \sum_{i=k+1}^N P(i)$ , где  $P(i)$  — вероятность того, что помеха попадает в  $i$  из  $N$  каналов. С учетом биномиальной формулы (см. задачу 3.1.3)

$$q = 1 - \sum_{i=k+1}^N C_N^i p_{c.n}^i (1 - p_{c.n})^{N-i}.$$

Если  $N = 2k + 1 = 5$ , то  $k = 2$  и

$$q = 1 - [C_5^3 p_{c.n}^3 (1 - p_{c.n})^2 + C_5^4 p_{c.n}^4 (1 - p_{c.n}) + C_5^5 p_{c.n}^5].$$

При  $p_{c.n} = 0,1$   $q = 8,46 \cdot 10^{-3}$ .

3.3.11. Согласно биномиальной формуле вероятность перерывов в передаче  $p_{\text{пер}} = P/N = p_{c.n}^N$ . Вероятность наличия связи  $p_{\text{св}} = 1 - p_{c.n}^N$ . Вероятность того, что при наличии связи прием ведется по  $n \leq N$  ветвям,

$$P(n) = \frac{C_N^n p_{c.n}^{N-n} (1 - p_{c.n})^n}{1 - p_{c.n}^N}.$$

В этом выражении числитель определяет совместную вероятность наличия связи и осуществления приема по  $n$  не забытым помехой ветвям, а знаменатель определяет безусловную вероятность связи. Средняя вероятность ошибочного приема символа в рассматриваемой ЧРСС

$$p_{\text{ош}} = \sum_{n=1}^N P(n) p_n.$$

3.3.13. Длительность импульсной помехи на входе (выходе) ограничителя  $\tau_n$  примерно обратно пропорциональна полосе пропус-

кания входного блока, т. е. энергия импульсной помехи после ограничения  $E_{н.п} = U^2_{0}/\Delta f$ . С другой стороны,  $E_c = U^2_m T/2$ . При  $U_m = U_0$  имеем  $\Delta f > 10/T$ .

### 3.3.14. Указание к решению.

Воспользоваться формулой для вероятности правильного декодирования, полученной в решении задачи 3.3.9.

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 3.4.

3.4.1. Произвольный случайный процесс  $X(t)$  можно записать как сумму центрированного процесса  $\dot{X}(t)$  и его математического ожидания:  $X(t) = \dot{X}(t) + m_x(t)$ . Аналогично представляются и системные характеристики произвольной линейной системы:

$$G(t, \tau) = \dot{G}(t, \tau) + g(t, \tau), \text{ где } g(t, \tau) = \overline{G(t, \tau)};$$

$$K(j\omega, t) = \dot{K}(j\omega, t) + k(j\omega, t), \text{ где } k(j\omega, t) = \overline{K(j\omega, t)}.$$

С учетом сказанного отклик произвольной линейной системы с характеристикой  $G(t, \tau)$  или  $K(j\omega, t)$  на произвольное воздействие  $X(t)$  может быть определен суммой  $Y_1(t) + Y_2(t) + Y_3(t) + Y_4(t)$  (рис. Р.3.2). Независимость откликов  $Y_1(t)$ ,  $Y_2(t)$ ,  $Y_3(t)$ ,  $Y_4(t)$  следует из статистической независимости детерминированной и флуктуирующей частей любого случайного процесса, а также из предположения независимости между входным воздействием  $X(t)$  и свойствами системы, через которую это воздействие проходит.

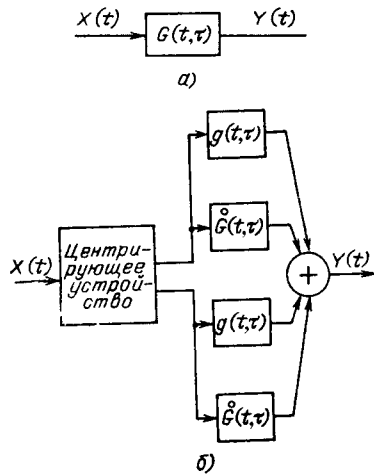


Рис. Р.3.2 Прохождение случайных воздействий через линейную систему со случайно меняющимися параметрами: а — общая схема канала, б — представление канала четырьмя параллельными ветвями

3.4.4. Энергетический спектр отклика линейного четырехполюсника с постоянными параметрами связан с энергетическим спектром воздействия следующим соотношением:  $G_y(f) = k^2(2\pi f) G_x(f)$ .

Модуль комплексного коэффициента передачи колебательного контура

$$k(2\pi f) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}},$$

где

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \alpha = 0,5R/L.$$

Энергетический спектр выходного процесса

$$G_y(f) = N_0 \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}.$$

Совершая переход к корреляционной функции по (2.24), получаем

$$B_y(\tau) = N_0 \omega_0^2 \alpha^{-1} \exp(-\alpha|\tau|) [\cos \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \tau + \alpha (\omega_0^2 - \alpha^2)^{-0,5} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} |\tau|].$$

Если  $Q \gg 1$  (т. е.  $\omega_0 \gg \alpha$ ), с учетом того, что  $\omega_0^2 \alpha^{-1} = 2R_0/L$ ,

$$B_y(\tau) = 2N_0 R_0 L^{-1} \exp(-\alpha|\tau|) \cos \omega_0 \tau.$$

3.4.6. Усредненный энергетический спектр входного сигнала  $\dot{G}_x(f) = 0,5A^2 \delta(f - f_0)$ .

Учитывая, что  $B_y(t, t+\tau) = B_x(\tau) B_x(\tau)$ , получаем

$$B_y(t, t+\tau) = a \exp(-\alpha_2|\tau|) \cdot 0,5 \overline{A^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi f \tau - \alpha_1 |f|) \delta(f - f_0) df = a \exp(-\alpha_1 |f_0| - \alpha_2 |\tau|) \overline{A^2} \cos \omega_0 \tau.$$

3.4.8. Коэффициент передачи идеальной длинной линии с линейно меняющейся во времени задержкой

$$k(j\omega) = a \exp(-jl\omega t),$$

где  $a, l$  — константы. Корреляционная функция отклика

$$B_y(t, t+\tau) = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-jl\omega t) \exp[-jl\omega(t+\tau)] G_x(f) \exp(j\omega\tau) df = a^2 B_x[(1-l)\tau].$$

Такой корреляционной функции соответствует энергетический спектр

$$G(f) = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} B_x[(1-l)\tau] \exp(-j\omega\tau) d\tau = a^2 (1-l)^{-1} G_x[f/(1-l)].$$

Отсюда видно, что задержка процесса, пропорциональная времени, приводит к сдвигу средней частоты спектра на величину  $lf_0$  (доплеровскому смещению частоты), к соответствующему расширению (при  $1-l < 1$ ) или сужению (при  $1-l > 1$ ) его, а также к изменению интенсивности в  $1/(1-l)$  раз. Впрочем, в системах связи при  $|l| \ll 1$  в области достаточно высоких частот  $f_0$  практически во внимание следует брать только доплеровское смещение частоты.

3.4.9. Перемножив  $Z(t)$  и  $u_r(t)$  и выделив из произведения только низкочастотный продукт, получим

$$Y(t) = \frac{U_r k_{AM}}{2} b(t) \cos(\varphi_0 - \varphi_r) + \frac{1}{2} U_r X_{\Pi}(t) \cos \varphi_r - \frac{1}{2} U_r Y_{\Pi} \sin \varphi_r.$$

Процесс  $Y(t)$  имеет гауссовское распределение с параметрами:

$$m_y(t) = U_r \frac{k_{AM}}{2} b(t) \cos(\varphi_0 - \varphi_r); \quad \sigma_y^2(t) = \frac{1}{4} U_r^2 F_c N_0.$$

Корреляционная функция для флуктуирующей части выходного продукта

$$B_y(\tau) = \frac{1}{4} U_r^2 F_c N_0 \frac{\sin 2\pi F_c \tau}{2\pi F_c \tau},$$

а энергетический спектр равномерен в полосе частот  $F_c$  и равен

$$G_y(f) = \frac{1}{4} U_r^2 N_0.$$

Отношение сигнал-шум на выходе синхронного детектора

$$(P_c/P_{ш})_{\text{вых}} = \frac{\widetilde{m_y^2(t)}}{\sigma_y^2} = \frac{k_{AM}^2 \widetilde{b^2(t)} \cos^2(\varphi_0 - \varphi_r)}{F_c N_0}.$$

Отношение сигнал-шум на входе детектора в полосе канала  $F_k = 2F_c$

$$(P_c/P_{ш})_{\text{вх}} = \frac{k_{AM}^2 \widetilde{b^2(t)}}{2F_c N_0}.$$

Выигрыш модема

$$g_{\text{БМ}} = 2 \cos^2(\varphi_0 - \varphi_r).$$

При  $\varphi_0 = \varphi_r$  значение  $g_{\text{БМ}}$  максимально и равно 2.

3.4.11. При квадратичном преобразовании случайной величины каждому значению  $Y$ , которое всегда положительно, соответствуют два значения случайной величины  $X$ :  $X_1 = \sqrt{Y}$ ,  $X_2 = -\sqrt{Y}$ . Тогда в соответствии с методикой нахождения распределений функционально связанных случайных величин получаем для одномерного распределения  $w_1(y)$  при условии, что известно распределение  $w_1(x)$  [10]:

$$w_1(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} (w_1(\sqrt{y}) + w_1(-\sqrt{y})), \quad y > 0.$$

При гауссовском распределении входной величины

$$w_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2} 2\sqrt{y}} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_x^2}\right).$$

Математическое ожидание выходного продукта согласно (3.20)

$$y = m_y = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w_1(x) dx = \sigma_x^2.$$

Двумерная плотность вероятности входного процесса [10]

$$w_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-R^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_x^2(1-R^2)} \times \right. \\ \left. \times [x_1^2 + x_2^2 - 2Rx_1 x_2]\right\}.$$

Корреляционная функция выходного процесса согласно (3.19)

$$B_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1^2 - \bar{y})(x_2^2 - \bar{y}) w_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

После несложных преобразований получим

$$B_y(\tau) = 2B_x^2(\tau) = 2\sigma_x^4 R_x^2(\tau) = 2\sigma_x^4 e^{-2\alpha|\tau|}.$$

Такой корреляционной функции соответствует энергетический спектр

$$G_y(f) = 4\sigma^4 \frac{2\alpha}{4\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}.$$

Обратим внимание на то, что хотя отклик и воздействие имеют различные распределения (выходной процесс не является гауссовским), форма корреляционной функции и энергетического спектра флуктуаций на выходе системы такая же, как и на входе.

3.4.12. Огибающая входного процесса

$$R(t) = \sqrt{[U_m(1 + mb(t) + X_n(t))]^2 + Y_n^2(t)}.$$

На выходе неискажающего ФНЧ с граничной частотой  $F_c = F_k/2$  продукт линейного детектирования  $Y_{\text{НЧ}}(t) = K_1 R(t)$ , где  $K_1$  — коэффициент пропорциональности; примем далее  $K_1 = 1$ .

Процесс  $Y_{\text{НЧ}}(t)$  имеет обобщенное распределение Рэлея с математическим ожиданием

$$m_{y_{\text{НЧ}}}(t) = \sigma \sqrt{0,5\pi} \left\{ (1 + 0,5\alpha_p^2(t)\sigma^{-2}) I_0(0,25\alpha_p^2(t)\sigma^{-2}) + \right. \\ \left. + [0,5\alpha_p^2(t)\sigma^{-2}] I_1(0,25\alpha_p^2(t)\sigma^{-2}) \exp(-0,25\alpha_p^2(t)\sigma^{-2}) \right\}$$

( $\sigma^2 = F_k N_0$  — средняя мощность шума на входе детектора;  $0,5\alpha_p^2(t) = 0,5U_m^2 [1 + mb(t)]^2$  — средняя за период высокой частоты мощность АМ-сигнала) и дисперсией

$$\sigma_{y_{\text{НЧ}}}^2(t) = \overline{Y_{\text{НЧ}}^2} - m_{y_{\text{НЧ}}}^2(t) = 2\sigma^2 + \alpha_p^2(t) - m_{y_{\text{НЧ}}}^2(t),$$

которую примем за среднюю за период высокой частоты мощность выходного шума.

Если величину  $m_{y_{\text{НЧ}}}(t)$  усреднить во времени, то получим постоянную составляющую выходного продукта, которая не несет информации. За полезную (сигнальную) составляющую выходного продукта следует принять сигнал  $Y_c(t) = m_{y_{\text{НЧ}}}(t) - \overline{m_{y_{\text{НЧ}}}(t)}$ .

Для упрощения анализа рассмотрим асимптотическое поведение  $m_{\text{внч}}(t)$  для двух крайних случаев: большое значение отношения сигнал-шум на входе  $\rho_{\text{вх}} = 0,5\alpha_p^2(t)/\sigma^2 \gg 1$  и малое значение отношения сигнал-шум на входе  $\rho_{\text{вх}} \ll 1$ .

В первом случае, воспользовавшись асимптотикой,

$$I_n(x) = (2\pi x)^{-0,5} (1 + \lambda/x) \exp x; \quad \lambda = 1/8$$

при  $n=0, \lambda = -3/8$  при  $n=1$ ,

получим

$$m_{\text{внч}}(t) \approx \alpha_p(t), \quad P_{\text{с.вых}} \approx U_m^2 m^2 \widetilde{b^2(t)},$$

$$P_{\text{ш вх}} \approx \sigma^2, \quad g = \rho_{\text{вых}}/\rho_{\text{вх}} = 2m^2 \widetilde{b^2(t)} [1 + m^2 \widetilde{b^2(t)}]^{-1}.$$

Во втором случае, воспользовавшись асимптотикой

$$I_0(x) \approx 1 + (0,5x)^2, \quad I_1(x) \approx 0,5x,$$

получим  $m_{\text{внч}}(t) = \sqrt{0,5\pi\sigma} [1 + 0,5\alpha_p^2(t)/\sigma^2]$ ;  $P_{\text{с.вых}} \approx 0,5U_m^4 m^2 \pi \times \times \widetilde{b^2(t)}/\sigma^2$ ;

$$P_{\text{ш вых}} \approx 0,43\sigma^2; \quad g = 3,7 \cdot 2 \cdot U_m^2 m^2 \widetilde{b^2(t)} [\sigma^2 (1 + m^2 \widetilde{b^2(t)})]^{-1}.$$

Обратим внимание на то, что в рассматриваемой нелинейной схеме (линейном детекторе) сильная компонента на входе подавляет слабую. Это сказывается, в частности, в том, что значение параметра  $g$  при  $\rho_{\text{вх}} \ll 1$  уменьшается по сравнению с его значением при  $\rho_{\text{вх}} \gg 1$  в  $\sigma^2/(3,7U_m^2) \gg 1$  раз.

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 3.5.

3.5.1. Дифференциальное уравнение цепи запишем в виде

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = 1(t).$$

Введем переменные состояния

$$x_1(t) = y(t); \quad x_2(t) = y^{(1)}(t); \quad \dots; \quad x_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

При замене переменных исходному дифференциальному уравнению цепи  $n$ -го порядка будет соответствовать система дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3; \quad \dots; \quad \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n;$$

$$\frac{dx_n}{dt} = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \dots - a_0x_1 + 1(t).$$

Эта система представляет собой скалярные уравнения состояния заданной цепи.

Скалярное уравнение наблюдения для данной цепи

$$x_1(t) = y(t).$$

Полученные уравнения состояния и наблюдения можно представить в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{F}\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}1_n$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{X}(t).$$

С учетом правил векторно-матричных преобразований находим

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1(t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H} = |1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0|.$$

Схема аналогового вычислителя показана на рис. Р.3.3.

3.5.3. Нетрудно убедиться, что цепи с заданным операторным коэффициентом передачи  $K(p)$  будет соответствовать операторное уравнение, связывающее между собой входное напряжение  $u(t)$  и выходной процесс  $y(t)$ :

$$\lambda_1 p^{n-1} U(p) + \lambda_2 p^{n-2} U(p) + \dots + \lambda_{n-1} p U(p) + \lambda_n U(p) = p^n Y(p) + p^{n-1} \psi_1 Y(p) + \dots + \psi_{n-1} p Y(p) + \psi_n Y(p).$$

Этому операторному уравнению соответствует скалярное линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)}(t) + \psi_1 y^{(n-1)}(t) + \psi_2 y^{(n-2)}(t) + \dots + \psi_{n-1} y^{(1)}(t) + \psi_n y(t) = \lambda_1 u^{(n-1)}(t) + \lambda_2 u^{(n-2)}(t) + \dots + \lambda_{n-1} u^{(1)}(t) + \lambda_n u(t).$$

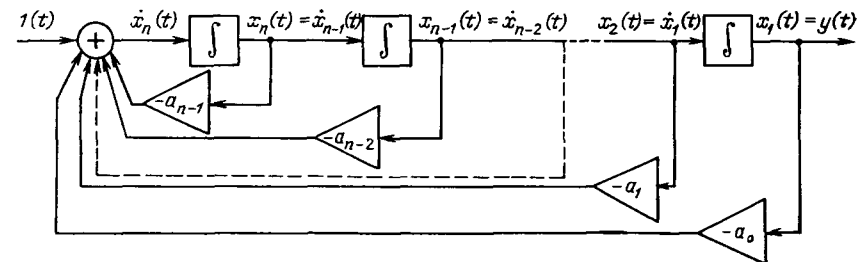


Рис. Р.3.3. Схема аналогового вычислителя (к решению задачи 3.5.1)



Представим это уравнение в виде

$$y^{(n)}(t) = -\psi_1 y^{(n-1)}(t) - \psi_2 y^{(n-2)}(t) - \dots - \psi_n y(t) + \lambda_1 u^{(n-1)}(t) + \lambda_2 u^{(n-2)}(t) + \dots + \lambda_{n-1} u^{(1)}(t) + \lambda_n u(t).$$

Обозначим  $\dot{x}_n(t) = -\psi_n y(t) + \lambda_n u(t)$ .

Интегрируя с учетом этого обозначения уравнение для  $y^{(n)}(t)$ , получаем

$$y^{(n-1)}(t) = -\psi_1 y^{(n-2)}(t) - \psi_2 y^{(n-3)}(t) - \dots - \psi_{n-1} y(t) + x_n(t) + \lambda_1 u^{(n-2)}(t) + \dots + \lambda_{n-1} u(t).$$

Примем, что  $\dot{x}_{n-1}(t) = -\psi_{n-1} y(t) + \lambda_{n-1} u(t)$ . После интегрирования уравнения для  $y^{(n-1)}(t)$  получим

$$y^{(n-2)}(t) = -\psi_1 y^{(n-3)}(t) - \psi_2 y^{(n-4)}(t) - \dots - \psi_{n-2} y(t) + x_{n-1}(t) + \lambda_1 u^{(n-3)}(t) + \dots + \lambda_{n-2} u(t).$$

Осуществив эту операцию  $n$  раз и приняв  $y(t) = x_1(t)$ , получаем систему уравнений состояния (3.25). Фрагмент схемы аналогового вычислителя, реализующего эту систему, показан на рис. Р.3.4.

3.5.6. Нетрудно показать, что при прохождении белого шума  $N(t)$  через линейную цепь с операторным коэффициентом передачи  $K(p) = \alpha/(p+\alpha)$  (интегрирующая RC-цепь) образуется гауссовский процесс  $S(t)$  с корреляционной функцией

$$B_s(t_1, t_2) = P_c \exp(-\alpha |t_2 - t_1|).$$

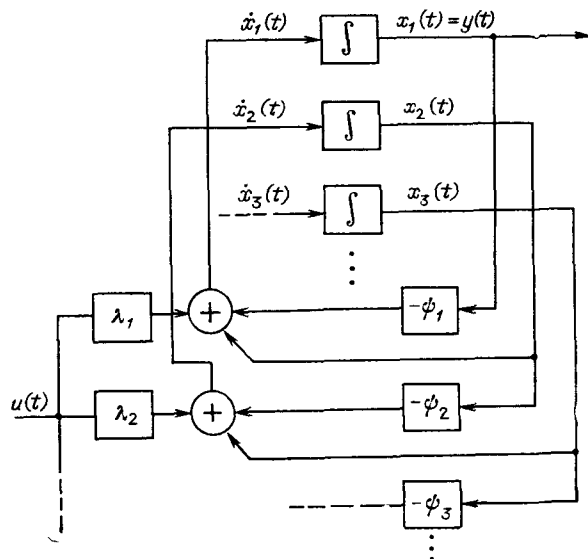


Рис. Р.3.4. Схема аналогового вычислителя (к решению задачи 3.5.3)

Очевидно, что операторное уравнение для процесса  $S(t)$  можно записать так:

$$S(p) = K(p)N(p) = N(p)\alpha/(\alpha+p)$$

или

$$pS(p) = -\alpha S(p) + \alpha N(p).$$

Такому операторному уравнению соответствует дифференциальное уравнение

$$\dot{S}(t) = -\alpha S(t) + \alpha N(t).$$

Белый шум со спектральной плотностью мощности  $2P_c/\alpha$  можно представить через белый шум  $V(t)$  с единичной мощностью:

$$N(t) = \sqrt{2P_c/\alpha}V(t).$$

Поэтому

$$\dot{S}(t) = -\alpha S(t) + \sqrt{2\alpha P_c}V(t).$$

3.5.7. Указание к решению. Представить производную  $\dot{x}(t)$  в виде  $[x(t+\Delta t) - x(t)]/\Delta t$  и воспользоваться соотношениями (3.24).

3.5.8. Указание к решению. Сопоставьте закон Рэлея  $w(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$  со стационарной плотностью вероятности из задачи (3.5.7).

3.5.9. Указание к решению. Используйте методику решения задачи (3.5.4).

#### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГЛАВЫ 4

##### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 4.1.

4.1.3. Воспользуемся вспомогательным неравенством  $\ln x \leq x-1$ , которое следует из того факта, что линия  $u = \ln x$  касается прямой  $v = x-1$  в точке  $x=1$  (рис. Р.4.1). Рассмотрим разность

$$H(A) - \log K = -\sum_{i=1}^K P(a_i) \log P(a_i) - \sum_{i=1}^K P(a_i) \log K = \sum_{i=1}^K P(a_i) \log \frac{1}{KP(a_i)}.$$

Полагая  $x = 1/KP(a_i)$ , можно записать  $H(A) - \log K \leq \sum_{i=1}^K P(a_i) \times [1/KP(a_i)] \log e$  или  $H(A) - \log K \leq \sum_{i=1}^K [1/K - P(a_i)] \log e$ . Легко убедиться, что  $\sum_{i=1}^K [1/K - P(a_i)] = 0$ . Следовательно,  $H(A) - \log K \leq 0$ . Знак равенства будет только тогда, когда  $x = 1/KP(a_i) =$

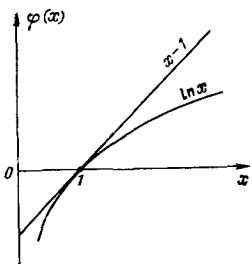


Рис. Р.41. К пояснению неравенства  $\ln x \leq x-1$

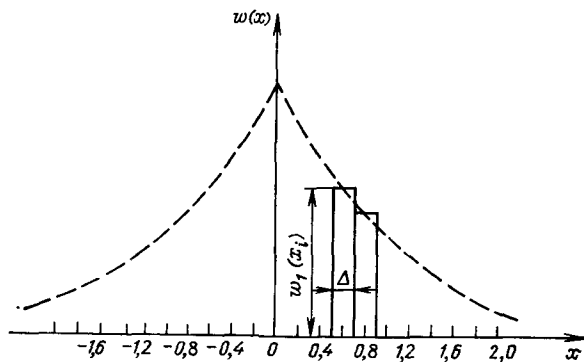


Рис. Р.42. К определению вероятностей появления уровней квантованного сигнала

$=1$ , поскольку при этом  $\ln x = x-1$ . Поэтому  $H(A) = \log K$  при  $P(a_i) = 1/K$ .

4.1.5. Прежде всего найдем безусловные вероятности передачи символов из соотношения  $P(0) = P(0|0') + [1-P(0)]P(0|1')$ . При заданных значениях переходных вероятностей  $P(0) = 0,125$ ;  $P(1) = 0,875$ . Можно убедиться в справедливости соотношения

$$P(1) = P(0)P(1|0') + [1-P(0)]P(1|1')$$

Энтропия источника

$$\begin{aligned} H(A|A') &= -P(0)[P(0|0') \log_2 P(0|0') + \\ &+ P(1|0') \log_2 P(1|0')] - P(1)[P(0|1') \log_2 P(0|1') + \\ &+ P(1|1') \log_2 P(1|1')] = 0,51 \text{ бит/символ.} \end{aligned}$$

Избыточность источника  $\kappa_{и} = 1 - H(A|A')/H_{\max}(A) = 0,49$ . Для источника без памяти при тех же безусловных вероятностях передачи символов

$$\begin{aligned} H(A) &= -P(1) \log P(1) - P(0) \log P(0) = 0,541 \text{ бит/символ,} \\ \kappa_{и} &= 0,459. \end{aligned}$$

4.1.7. Заданный объем информации источник передает  $n = T/\tau = 10^8$  послылками. Средняя информация на символ  $H = I/n = 10^7/10^8 = 0,1$ . Если избыточность полностью устранена, то каждый символ двоичного источника несет в себе  $H_{\max} = 1$  бит информации и заданный объем передается  $n_0 = I/H_{\max} = 10^7$  послылками, или за время  $T_0 = \tau n_0 = 10^5$  с. Избыточность источника

$$\kappa_{и}(n - n_0)/n = 1 - n_0/n = 1 - T_0/T = 1 - H/H_{\max} = 0,9.$$

Обратим внимание на то, что сокращение избыточности источника позволило бы на 90% экономичнее использовать во времени канал связи.

4.1.8. Количество информации, содержащееся в одном элементе сигнала  $H_{\max}(A) = \log_2 16 = 4$  бит/символ. Число элементов изображения в одном кадре  $N = 833 \cdot 625 = 520625$ . Количество информации в одном кадре  $I = NH_{\max} = 4 \cdot 520625 = 2,083 \cdot 10^6$  бит. Энтропия реального телевизионного изображения при 16 градациях яркости

$$H(A) \approx 9,37 \cdot 10^5 / 5,21 \cdot 10^5 = 1,8 \text{ бит/символ.}$$

Избыточность реального телевизионного сигнала  $\kappa_{и} = 1 - H(A)/H_{\max}(A) = 0,55$ .

4.1.11. Вероятности появления уровней квантованного сигнала определим по приближенной формуле  $P(x_i) = w_1(x_i)\Delta = 0,2 \times \exp(-|x_i|/0,5)$ , которая иллюстрируется рис. Р.4.2. Результаты расчета сведены в табл. Р.4.1.

Таблица Р.4.1

$i$	$x_i$	$P(x_i)$	$i$	$x_i$	$P(x_i)$
-8	-1,6	$8 \cdot 10^{-3}$	1	0,2	$1,34 \cdot 10^{-1}$
-7	-1,4	$1,2 \cdot 10^{-2}$	2	0,4	$9 \cdot 10^{-2}$
-6	-1,2	$1,8 \cdot 10^{-2}$	3	0,6	$6 \cdot 10^{-2}$
-5	-1,0	$2,8 \cdot 10^{-2}$	4	0,8	$4,0 \cdot 10^{-2}$
-4	-0,8	$4,0 \cdot 10^{-2}$	5	1,0	$2,8 \cdot 10^{-2}$
-3	-0,6	$6,0 \cdot 10^{-2}$	6	1,2	$1,8 \cdot 10^{-2}$
-2	-0,4	$9,0 \cdot 10^{-2}$	7	1,4	$1,2 \cdot 10^{-2}$
-1	-0,2	$1,34 \cdot 10^{-1}$	8	1,6	$8,0 \cdot 10^{-3}$
0	0	$2,0 \cdot 10^{-1}$			

По формуле (4.3) находим энтропию

$$H = - \sum_{i=-\infty}^{\infty} P(x_i) \log P(x_i) = 3,46 \text{ бит/отсчет.}$$

Избыточность находим по формуле (4.4):

$$\kappa_{и} = 1 - 3,46/\log_2 17 = 0,159.$$

Скорость создания информации на выходе квантующего устройства согласно (4.5)  $H'(A) = H(A)T_{\text{ср}}$ .

В данном случае  $T_{\text{ср}}$  равно интервалу между двумя соседними отсчетами входного сигнала:  $H'(A) = 3,46/0,3 = 11,53$  бит/с.

4.1.13. Энтропия символа укрупненного алфавита  $H_y = nH(A)$ , где  $H(A)$  — энтропия первичного алфавита с объемом  $K$ . Объем укрупненного алфавита  $K_y = K^n$ , поэтому  $H_{y,\max} = \log K^n = nH_{\max}(A)$ . Избыточность источника с укрупненным алфавитом согласно (4.4)

$$\kappa_{и,y} = 1 - \frac{H_y}{H_{y,\max}} = 1 - \frac{nH(A)}{nH_{\max}(A)} = \kappa_{и},$$

где  $\kappa_{и}$  — избыточность первичного алфавита.

Поскольку избыточность осталась неизменной, но устранены связи символов, приходится констатировать, что в укрупненном

алфавите отдельные символы более значительно отличаются своими априорными вероятностями.

Устранение избыточности сообщения укрупненного алфавита возможно при неравномерном кодировании (см. решение задачи 4.1.14).

4.1.14. Обозначим источник восьмеричных символов через  $A$ , а источник, создающий двоичные символы неравномерного кода, через  $B$ . Энтропия источника  $A$ :  $H(A) = -\sum_i p_i \log_2 p_i = 1,781$  бит/символ. Избыточность источника  $B$  согласно (4.4)

$$\kappa_n(B) = 1 - \frac{H(B)}{\log_2 2} = 1 - \frac{v_B H(B)}{v_B},$$

$v_B = 1/T_{ср\ B}$  — число символов источника  $B$  в единицу времени;  $T_{ср\ B}$  — средняя длительность символа источника.

Чтобы не было потерь информации при кодировании, надо потребовать равенства производительностей источников  $A$  и  $B$ , т. е.  $v_B H(B) = v_A H(A)$ . Тогда

$$\kappa_n(B) = 1 - \frac{v_A H(A)}{v_B} = 1 - \frac{H(A)}{\bar{n}},$$

где  $\bar{n} = v_B/v_A = T_{ср\ A}/T_{ср\ B}$  — среднее число двоичных символов источника  $B$  на один символ источника  $A$ .

В соответствии с табл. 4.5  $\bar{n} = \sum_i p_i n_i = 1,825$  и  $\kappa_n(B) = 1 - 1,781/1,825$ . Избыточность составляет всего 2,4%.

#### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 4.2.

4.2.1. В двоичном симметричном канале со стиранием объем алфавита на входе  $m=2$ , а объем алфавита на выходе  $m'=3$ . Энтропия шума согласно (4.11)

$$\begin{aligned} H(\hat{B}|B) &= -\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 P(b_i) P(\hat{b}_j|b_i) \log P(\hat{b}_j|b_i) = \\ &= -P(0)(1-p_0-p_c) \log(1-p_0-p_c) - P(1)p_0 \log p_0 - \\ &- P(0)p_0 \log p_0 - P(1)(1-p_0-p_c) \log(1-p_0-p_c) - \\ &- P(0)p_c \log p_c - P(1)p_c \log p_c = \\ &= (1-p_0-p_c) \log(1-p_0-p_c) - p_0 \log p_0 - p_c \log p_c. \end{aligned}$$

Отметим, что ненадежность рассматриваемого канала не зависит от априорных вероятностей входных символов. Перейдем к нахождению энтропии шума.

В соответствии с формулой Байеса находим апостериорные вероятности:

$$P(0|\hat{0}) = \frac{P(0)(1-p_0-p_c)}{P(0)(1-p_0-p_c) + P(1)p_0};$$

$$P(1|\hat{1}) = \frac{P(1)(1-p_0-p_c)}{P(1)(1-p_0-p_c) + P(0)p_0};$$

$$P(0|\hat{1}) = \frac{P(0)p_0}{P(1)(1-p_0-p_c) + P(0)p_0};$$

$$P(1|\hat{0}) = \frac{P(1)p_0}{P(0)(1-p_0-p_c) + P(1)p_0};$$

$$P(0|?) = P(0); \quad P(1|?) = P(1).$$

Совместные вероятности символов входа и выхода:

$$P(0, \hat{0}) = P(0)(1-p_0-p_c); \quad P(0, \hat{1}) = P(0)p_0;$$

$$P(1, \hat{1}) = P(1)(1-p_0-p_c); \quad P(1, \hat{0}) = P(1)p_0;$$

$$P(0, ?) = P(0)p_c; \quad P(1, ?) = P(1)p_c.$$

Подставив найденные совместные и апостериорные вероятности в (4.7), получим для ненадежности двоичного симметричного канала со стиранием

$$\begin{aligned} H(B|\hat{B}) &= -P(0)(1-p_0-p_c) \log \frac{P(0)(1-p_0-p_c)}{P(0)(1-p_0-p_c) + P(1)p_0} - \\ &- P(1)p_0 \log \frac{P(1)p_0}{P(1)(1-p_0-p_c) + P(0)p_0} - \\ &- P(0)p_0 \log \frac{P(0)p_0}{P(1)p_0 + P(0)(1-p_0-p_c)} - P(1)(1-p_0-p_c) \times \\ &\times \log \frac{P(1)(1-p_0-p_c)}{P(1)(1-p_0-p_c) + P(0)p_0} - P(0)p_c \log P(0) - P(1)p_c \log P(1). \end{aligned}$$

Если  $p_0 \rightarrow 0$ , то  $H(B|\hat{B}) = -P(0)p_c \log P(0) - P(1)p_c \log P(1) = -p_c H(B)$ .

Ненадежность канала зависит как от вероятности стирания, так и энтропии источника на входе канала.

4.2.2. Суммарная вероятность ошибки  $p$  — это вероятность того, что при передаче фиксированного символа  $b_i$  будет принят любой символ, кроме символа  $\hat{b}_i$ . Поскольку всего может произойти  $m-1$  ошибочных переходов при фиксации символа  $b_i$  на передаче, а канал симметричен, то вероятность приема фиксированного символа  $\hat{b}_j$  при передаче символа  $b_i$  будет равна  $p/(m-1)$ . Следовательно, в  $m$ -ичном симметричном канале вероятности переходов удовлетворяют условиям

$$P(\hat{b}_j|b_i) = \begin{cases} 1-p & \text{при } j=i, \\ p/(m-1) & \text{при } j \neq i. \end{cases}$$

Подставляя эти вероятности в выражение (4.11), находим энтропию шума

$$H(\hat{B}|B) = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m P(b_i) P(\hat{b}_j|b_i) \log P(\hat{b}_j|b_i).$$

Выделяя из этой суммы слагаемые с номером  $i=j$ , получаем

$$H(\hat{B}|B) = - \sum_{i=1}^m P(b_i) (1-p) \log(1-p) - \\ - \sum_{j=1}^m \sum_{i \neq j} P(b_i) \frac{p}{m-1} \log \frac{p}{m-1} = \\ = -(1-p) \log(1-p) - p \log \frac{p}{m-1}.$$

4.2.4. Согласно формуле (4.12) находим скорость передачи информации

$$I'(B, \hat{B}) = v_k I(B, \hat{B}) = v_k [H(B) - H(B|\hat{B})].$$

Как показано в решении задачи 4.2.1, ненадежность двоичного симметричного канала со стиранием при  $p_0 \rightarrow 0$   $H(B|\hat{B}) = p_c H(B)$ . Следовательно, скорость передачи информации в таком канале

$$I'(B, \hat{B}) = v_k [H(B) - p_c H(B)] = v_k H(B) (1-p_c).$$

Чем больше вероятность стирания  $p_c$ , тем надежнее отождествляются символы 1 и 0 в месте приема, однако одновременно падает скорость передачи информации по каналу. Следовательно, имеет место обмен между верностью (качеством) и количеством переданной информации.

4.2.6. Согласно (4.13) пропускная способность канала

$$C = v_k \max [H(\hat{B}) - H(\hat{B}|B)].$$

Как показано в решении задачи 4.2.2, энтропия шума  $m$ -ичного симметричного канала без памяти и без стирания равна

$$H(\hat{B}|B) = -(1-p) \log(1-p) - p \log \frac{p}{m-1}.$$

С учетом этого имеем

$$C = v_k \left[ \max H(\hat{B}) + (1-p) \log(1-p) + p \log \frac{p}{m-1} \right].$$

Очевидно, что  $\max H(\hat{B}) = \log m$ . Следовательно,

$$C = v_k \left[ \log m + (1-p) \log(1-p) + p \log \frac{p}{m-1} \right].$$

Для двоичного симметричного канала без памяти и стирания ( $m=m'=2$ )

$$C = v_k [1 + p \log p + (1-p) \log(1-p)].$$

График величины  $C/v_k$  в зависимости от  $p$  показан на рис. Р.4.3. Пропускная способность канала равна нулю, когда вероятности перехода  $P(\hat{0}|1) = P(\hat{1}|0) = 0,5$ . (В этом случае символы на входе и выходе оказываются независимыми.)

4.2.8. Избыточность кода (вторичного алфавита) можно определить по (4.4):

$$\kappa_k = 1 - H(B)/H_{\max}(B),$$

где  $H(B)$  — энтропия ансамбля кодовых символов. Очевидно, что при объеме ансамбля кодовых символов  $m$   $H_{\max}(B) = \log m$ . Следовательно,

$$\kappa_k = 1 - \frac{H(B)}{\log m} = 1 - \frac{H'(B)}{v_k \log m},$$

где  $H'(B) = v_k H(B)$ ;  $v_k$  — число кодовых символов, поступающих на вход канала в единицу времени. Поскольку при кодировании должны отсутствовать потери информации, то  $H'(B) = H'(A) = v_n H(A)$ , где  $v_n$  — число символов, создаваемых источником сообщения в единицу времени;  $H(A)$  — энтропия источника. С учетом этого

$$\kappa_k = 1 - \frac{v_n H(A)}{v_k \log m}.$$

Согласно теореме Шеннона лишь при  $v_n H(A) < C$  существует оптимальный способ кодирования. Следовательно, избыточность кода не может быть меньше величины

$$\kappa_{k,\min} = 1 - \frac{C}{v_k \log m} + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — сколь угодно малая положительная величина.

Для двоичного симметричного канала без памяти и стирания согласно решению задачи 4.2.6.  $C = v_k [1 + p \log p + (1-p) \log(1-p)]$ . Подставляя эту величину в выражение  $\kappa_{k,\min}$  и учитывая, что  $m=2$ , получаем

$$\kappa_{k,\min} = 1 - \frac{v_k [1 + p \log p + (1-p) \log(1-p)]}{v_k \log_2 2} + \varepsilon = \\ = -p \log p - (1-p) \log(1-p) + \varepsilon.$$

Если  $p=0$  (в канале нет ошибок), то  $\kappa_{k,\min} = \varepsilon \rightarrow 0$ . Если  $p=0,01$ , то  $\kappa_{k,\min} \approx 0,067$ , т. е. при не очень сильных помехах в канале избыточность оптимального кода невелика.

4.2.9. Способы кодирования и декодирования, обеспечивающие сколь угодно малую вероятность ошибки, согласно теореме Шеннона, существуют лишь при  $H'(A) < C$ . Если источник информации выдает в единицу времени  $v_n$  символов, а его энтропия  $H(A)$ , то  $H'(A) = v_n H(A)$ . Пропускная способность канала по определению равна  $C = v_k \max I(B, \hat{B})$ . Следовательно, можно записать, что оптимальное кодирование по Шеннону возможно лишь при  $v_n H(A) < v_k \max I(B, \hat{B})$  или  $\bar{n} = \frac{v_k}{v_n} > \frac{H(A)}{\max I(B, \hat{B})}$ . Здесь  $\bar{n}$  — среднее число символов кода на один символ источника.

4.2.10. Из (4.15) получаем запас пропускной способности

$$C - H'(A) = - \frac{\log_2 p_{\text{ош}}}{T} = - \frac{\log_2 10^{-6}}{200 \cdot 10^{-3}} = 90,96 \text{ бит/с.}$$

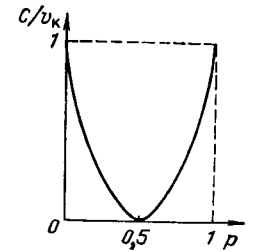


Рис. Р.4.3. Зависимость нормированной пропускной способности двоичного симметричного канала без памяти от вероятности ошибочного приема символа

Подчеркнем, что чем больше запас пропускной способности, тем легче реализуется система связи, но одновременно падает ее эффективность. Очевидно, что  $T = -\frac{\log_2 p_{\text{ош}}}{C - H'(A)}$ .

Поэтому при сохранении вероятности ошибки (качества связи) неизменной уменьшение запаса пропускной способности в 2 раза (рост эффективности системы) влечет за собой увеличение длительности кодовой комбинации в 2 раза, что приводит к усложнению системы (в частности, из-за усложнения устройств памяти на передаче и приеме).

4.2.11. Предположим, что можно закодировать некоторый источник с производительностью  $H'(A) = C + 2\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$  так, что ненадежность канала  $H'(A|\bar{A}) \leq \epsilon$ . Тогда оказывается, что скорость передачи информации в системе связи  $I(A, \bar{A}) = H'(A) - H'(A|\bar{A}) > C + \epsilon$ , т. е. будет больше пропускной способности канала, что противоречит ее определению. Противоречия не будет, если допустить, что при  $H'(A) > C$  сообщение передается с отличной от нуля ненадежностью  $H'(A|\bar{A}) > \epsilon$ .

4.2.12. При кодировании по методу Хаффмена все символы источника располагают в порядке убывания вероятностей. Если несколько букв имеют одинаковые вероятности, их располагают рядом в произвольном порядке. Затем выбирают две буквы с наименьшими вероятностями, и одной из них в качестве первого символа двоичного кода приписывают символ 0, а другой — символ 1. Выбранные буквы объединяют в «промежуточную» букву, имеющую вероятность, равную сумме вероятностей выбранных букв. Затем в ансамбле оставшихся букв (вместе с промежуточной) вновь находят две с наименьшими вероятностями и поступают так же, как и на первом шаге. Эту процедуру осуществляют до тех пор, пока не будет исчерпан весь алфавит.

Процесс кодирования показан в табл. Р.4.2. Средняя длина кодовой комбинации данного кода  $\bar{n} = \sum_{i=1}^9 n_i p_i = 3,08$ . Минимальная длина кодовой комбинации примитивного кода, которым можно закодировать данный алфавит,

$$\bar{n}_{\text{мин.п}} = \log K / \log m = 4.$$

При оптимальном двоичном кодировании в канале без шумов

$$\bar{n}_{\text{мин.о}} = H(A) / \log m = H(A) = -\sum_{i=1}^9 p_i \log p_i = 3,04.$$

Средняя длина кодовой комбинации кода Хаффмена отличается от средней длины оптимального кода на

$$\frac{3,08 - 3,04}{3,04} \cdot 100\% = 1,32\%,$$

что позволяет считать код Хаффмена близким к оптимальному.

4.2.15. Кодирование по методу Шеннона — Фано осуществляется следующим образом. Все буквы записываются в порядке

Таблица Р.4.2

Символ	$p_i$	Граф кода Хаффмена	Код
$a_1$	0,2		11
$a_2$	0,15		001
$a_3$	0,15		011
$a_4$	0,12		010
$a_5$	0,1		101
$a_6$	0,1		100
$a_7$	0,08		0001
$a_8$	0,06		00001
$a_9$	0,04		00000

убывания их вероятностей. Затем вся совокупность букв разбивается на две примерно равновероятные группы. Всем буквам верхней группы приписывается первый кодовый символ 1, а буквам нижней группы — символ 0.

Затем каждая группа аналогичным образом разбивается на подгруппы по возможности с одинаковыми вероятностями, причем верхним подгруппам в обеих группах приписывается символ 1 (второй кодовый символ), а нижним — символ 0. Эта процедура осуществляется до тех пор, пока в каждой подгруппе не останется по одной букве. Процесс кодирования по Шеннону — Фано иллюстрируется табл. Р.4.3.

Средняя длина кодовой комбинации

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^8 n_i p_i = 2,75.$$

При оптимальном двоичном кодировании

$$\bar{n}_0 = H(A) = -\sum_{i=1}^8 p_i \log p_i = 2,75.$$

Таблица Р.4.3

Буква	$p_i$	Разбиение	Кодовая комбинация	
$a_1$	1/4	} 1	11	
$a_2$	1/4		} 0	10
$a_3$	1/8	} 1	011	
$a_4$	1/8		} 0	010
$a_5$	1/16	} 1	} 1	0011
$a_6$	1/16			
$a_7$	1/16	} 0	} 1	0001
$a_8$	1/16			

Следовательно, в данном случае код Шеннона — Фано является оптимальным.

#### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 4.3.

4.3.1. Рассмотрим сечение случайного процесса  $X(t)$ , предположив, что процесс в этом сечении имеет плотность вероятности  $w_1(x)$ . Разделим область изменений  $X$  на дискретные уровни  $x_i$  с малым интервалом  $\Delta x$  между ними. Вероятность того, что значение  $X$  лежит в интервале  $(x_i, x_i + \Delta x)$ , приближенно равна  $p_i = w_1(x_i) \Delta x$ . Будем считать, что отдельные отсчеты случайного сигнала  $X(t)$  независимы, а их распределение не зависит от времени (стационарный источник без памяти). Тогда согласно (4.3) можно записать выражение для энтропии на один отсчет квантованного сигнала:

$$\begin{aligned} H_{\Delta x}(X) &= - \sum_i w_1(x_i) \Delta x \log [w_1(x_i) \Delta x] = \\ &= - \sum_i w_1(x_i) \Delta x \log [w_1(x_i)] - \sum_i w_1(x_i) \Delta x \log \Delta x. \end{aligned}$$

Чтобы непрерывный отсчет воспроизвести абсолютно точно, необходимо, чтобы  $\Delta x \rightarrow 0$ . Заменяв тогда суммы соответствующими интегралами, найдем энтропию одного отсчета непрерывного сигнала

$$\begin{aligned} H(X) &= - \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) \log w_1(x) dx - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log \Delta x \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) \log w_1(x) dx - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log \Delta x. \end{aligned}$$

Так как  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log \Delta x = -\infty$ ,  $H(X) = \infty$ . Полученный результат означает, что один непрерывный отсчет сигнала мог бы перенести бесконечно много информации, если была бы возможность воспроизвести его абсолютно точно. К сожалению, в реальных каналах этой возможности нет.

4.3.2. Подставим в (4.16) выражение плотности вероятности гауссовского случайного процесса:

$$\begin{aligned} h(X) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2} \right] \log \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2} \right] dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2} \right] \times \\ &\times \left[ -\log \sqrt{2\pi\sigma^2} - \frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2} \log e \right] dx. \end{aligned}$$

Вводя новую переменную  $(x-m_x)/\sigma$  и интегрируя, получаем

$$h(X) = \log \sqrt{2\pi e \sigma^2}.$$

Следовательно, величина  $h(X)$  не зависит от  $m_x$ .

4.3.3. Условная дифференциальная энтропия может быть определена по формуле

$$h(X|X_{np}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x, x_{np}) \log w_1(x|x_{np}) dx dx_{np}.$$

Согласно [3]

$$\begin{aligned} w_1(x|x_{np}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-R^2)}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2(1-R^2)} (x-x_{np}R)^2 \right], \\ w_2(x, x_{np}) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2(1-R^2)} (x^2 + x_{np}^2 - 2Rx x_{np}) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в соотношение для условной дифференциальной энтропии, получаем

$$\begin{aligned} h(X|X_{np}) &= - \frac{1}{2\pi\sigma^2(1-R^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{x^2 + x_{np}^2 - 2Rx x_{np}}{2\sigma^2(1-R^2)} \right] \times \\ &\times \left[ -\log \sqrt{2\pi\sigma^2(1-R^2)} - \frac{1}{2\sigma^2(1-R^2)} (x-x_{np}R)^2 \log e \right] dx dx_{np}. \end{aligned}$$

После простых преобразований имеем

$$h(X|X_{np}) = \log \sqrt{2\pi e \sigma^2 (1-R^2)}.$$

Обратим внимание на то, что с ростом нормированной корреляционной функции условная дифференциальная энтропия уменьшается.

4.3.6. Указание к решению. Принять во внимание, что выходной сигнал  $Y(t) = X(t) + N(t)$  при гауссовских и независимых процессах  $X(t)$  и  $N(t)$  будет иметь гауссовское распределение и дисперсию  $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_n^2$ . При вычислении условной дифференциальной энтропии учесть, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) w_1(y|x) dx = w_1(y).$$

4.3.7. По определению

$$H_e(X) = \min I(X, \hat{X}) = h(X) - \max h(X|\hat{X}).$$

Поскольку  $X(t) = \hat{X}(t) - N(t)$ , то условная дифференциальная энтропия  $h(\hat{X}|X)$  при заданном сигнале  $\hat{X}(t)$  полностью определяется шумом воспроизведения (канала)  $N(t)$ . Поэтому  $\max h(X|\hat{X}) = \max h(N)$ . Если шум воспроизведения  $N(t)$  имеет фиксированную дисперсию  $\sigma_n^2$ , то  $\max h(N)$  достигается при гауссовском распределении случайной величины  $N$ :

$$\max h(N) = \log \sqrt{2\pi e \sigma_n^2}.$$

Следовательно,  $H_e(X) = h(X) - \log \sqrt{2\pi e \sigma_n^2}$ .

4.3.8. Максимум энтальпии непрерывного сигнала будет достигаться при  $\max h(X)$ . При заданной средней мощности

сигнала  $P_c = \sigma_x^2 \max h(X) = \log \sqrt{2\pi e P_c}$  и достигается при гауссовском распределении сигнала  $X(t)$ .

Следовательно,

$$H_\epsilon(X)_{\max} = \log \sqrt{2\pi e P_c} - \log \sqrt{2\pi e P_{\text{ш}}} = \frac{1}{2} \log \frac{P_c}{P_{\text{ш}}}.$$

где  $P_{\text{ш}} = \sigma_n^2$  — средняя мощность шума воспроизведения.

4.3.9. Согласно (4.23) при дискретном времени (с шагом квантования во времени  $\Delta t = 1/v_n$ ) эpsilon-производительность

$$H'_\epsilon(X) = v_n [h(X) - \log \sqrt{2\pi e \sigma_n^2}].$$

Очевидно, что  $H'_\epsilon(X)$  будет максимальной, когда  $h(X)$  максимальна. Но при заданной дисперсии (средней мощности  $P_c$ ) это достигается при гауссовском распределении процесса  $X(t)$  (см. решение задачи 4.3.8).

С учетом (4.17) имеем

$$H'_\epsilon(X)_{\max} = v_n \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} = \frac{v_n}{2} \log \frac{P_c}{P_{\text{ш}}}.$$

При непрерывном времени, полагая, что  $v_n = 2F_c$ , можно пользоваться формулой

$$H'_\epsilon(X)_{\max} = F_c \log \frac{P_c}{P_{\text{ш}}},$$

где  $F_c$  — полоса частот сигнала.

#### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 4.4

4.4.1. Поскольку спектр равномерный, то отсчеты входного сигнала и помехи, а следовательно, и сигнала на выходе независимы. Согласно (4.28)  $I(S, Z) = h(Z) - h(Z|S) = h(S) - h(S|Z)$ .

Подставив сюда выражения для  $h(S)$ ,  $h(S|Z)$ ,  $h(Z)$ ,  $h(Z|S)$  из решения задачи 4.3.6, получим  $I(S, Z) = 0,5 \log(1 + \sigma_s^2/\sigma_n^2) = 1,58$  бит/отсчет.

4.4.3. В соответствии с (4.27)  $I(S, Z) = v_n I(S, Z)$ . Подставив сюда выражение  $I(S, Z)$  из решения задачи 4.4.1, получим

$$I'(S, Z) = v_n \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \right) = 1500 \text{ бит/с.}$$

4.4.5. Согласно (4.29) при аддитивном шуме в канале

$$I'(S, Z) = v_n [h(Z) - h(N)].$$

Очевидно, что минимальная скорость передачи информации будет определяться соотношением  $\min I'(S, Z) = v_n \min [h(Z) - h(N)]$ .

Если ансамбль входных сигналов фиксирован, то  $\min [h(Z) - h(N)]$  будет иметь место при  $\max h(N)$ . Если дисперсия шума

фиксирована, то  $\max h(N)$  будет при гауссовском распределении шума, причем  $\max h(N) = \log \sqrt{2\pi e \sigma_n^2}$ . Следовательно, при указанных условиях скорость передачи информации будет наименьшей и равной

$$I'(S, Z) = v_n [h(Z) - \log \sqrt{2\pi e \sigma_n^2}].$$

4.4.6. Согласно (4.30)  $C = \max I(S, Z)$ . Как показано в решении задачи 4.4.5 для гауссовского канала,  $I'(S, Z) = v_n [h(Z) - \log \sqrt{2\pi e P_{\text{ш}}}]$ .

Отсюда следует, что пропускная способность гауссовского канала

$$C = v_n \max [h(Z) - \log \sqrt{2\pi e P_{\text{ш}}}]$$

Если дисперсия шума фиксирована, то

$$C = v_n [\max h(Z) - \log \sqrt{2\pi e P_{\text{ш}}}]$$

Дисперсия выходного сигнала  $\sigma_z^2 = P_c + P_{\text{ш}}$ , так как сигнал и шум считаются независимыми. При фиксированной дисперсии  $\sigma_z^2 \max h(Z)$  будет иметь место при гауссовском распределении процесса  $Z = S + N$ , а следовательно, при гауссовском распределении входного сигнала  $S(t)$ . В этом случае

$$C = v_n (\log \sqrt{2\pi e \sigma_z^2} - \log \sqrt{2\pi e P_{\text{ш}}}) = \frac{v_n}{2} \log(1 + P_c/P_{\text{ш}}).$$

Полагая  $v_n = 2F$  (в соответствии с теоремой Котельникова), можно написать выражение для пропускной способности гауссовского канала непрерывного времени

$$C = F \log(1 + P_c/P_{\text{ш}}).$$

4.4.9. Воспользуемся формулой для пропускной способности гауссовского канала, полученной в решении задачи 4.4.6. Полагая, что  $P_{\text{ш}} = FN_0$ , можно записать

$$C = F \log \left( 1 + \frac{P_c}{FN_0} \right) = F \log e \ln \left( 1 + \frac{P_c}{FN_0} \right).$$

Найдем предел  $C$  при  $F \rightarrow \infty$

$$C_\infty = \lim_{F \rightarrow \infty} C = \log e \lim_{F \rightarrow \infty} F \ln \left( 1 + \frac{P_c}{FN_0} \right).$$

Поскольку  $\ln(1+\epsilon) \approx \epsilon$  при  $\epsilon \rightarrow \infty$ , можем записать, что

$$C_\infty = \log e F \frac{P_c}{FN_0} = \frac{P_c}{N_0} \log e.$$

Легко показать, что пропускная способность гауссовского канала монотонно растет при расширении полосы канала  $F$  и асимптотически стремится к величине  $C_\infty$ .

4.4.10. Допустим, что сообщение передавалось в течение времени  $T$ . Так как скорость передачи информации по каналу с любой полосой не больше, чем  $C_\infty$ , можем записать, что количество

переданной по каналу информации удовлетворяет неравенству  $TI'(S, Z) \leq TC_\infty$  или, с учетом результата задачи 4.4.9,

$$TI'(S, Z) \leq \log eTP_c/N_0.$$

Отсюда следует, что для передачи  $TI'(S, Z) = 1$  бит информации необходимо, чтобы сигнал имел энергию  $P_cT$ , удовлетворяющую условию

$$E = P_cT \geq N_0 / \log_2 e = N_0 \ln 2 = 0,69N_0.$$

4.4.11. Средняя мощность заданного сигнала

$$P_c = A \int_{f_0 - 0,5F}^{f_0 + 0,5F} \exp[-\beta^2(f - f_0)^2] df = 46,5 \cdot 10^{-6} \text{ Вт}.$$

Средняя мощность шума в канале  $P_{\text{ш}} = FN_0 = 3,1 \cdot 10^{-6}$  Вт. Пропускная способность канала

$$C = F \log_2(1 + P_c/P_{\text{ш}}) = 1,24 \cdot 10^4 \text{ бит/с}.$$

Теперь по формуле (4.31) находим

$$v_{\text{и}} = CT_{\text{к}} = 1,24 \cdot 10^4 \cdot 3,6 \cdot 10^3 = 4,46 \cdot 10^7 \text{ бит}.$$

4.4.14. Мощность теплового шума может быть определена по формуле  $P_{\text{ш}} = 4kTF$ , где  $T$  — абсолютная температура приемного устройства;  $k$  — постоянная Больцмана, равная  $1,37 \cdot 10^{-23}$  Дж/град.

В данном случае  $F = 10$  кГц,  $T = 273 + t^\circ \text{C} = 293^\circ$ . Следовательно,  $P_{\text{ш}} = 4 \cdot 1,37 \cdot 10^{-23} \cdot 293 \approx 1,64 \cdot 10^{-16}$  Вт. При средней мощности сигнала  $10^{-6}$  Вт

$$C = 10^4 \log(1 + 10^{10}/1,64) \approx 3,26 \cdot 10^5 \text{ бит/с}.$$

4.4.16. Из условия основной теоремы кодирования Шеннона  $H'(A) < C$  следует, что в гауссовском канале оптимальное кодирование возможно только тогда, когда источник сообщения выдает за одну секунду

$$v_{\text{и}} < F \log_2(1 + P_c/P_{\text{ш}}) / H(A) \text{ символов}.$$

Если источник выдает двоичные равновероятные и независимые символы, то

$$v_{\text{и}} < F \log_2(1 + P_c/P_{\text{ш}}).$$

Очевидно, что условие  $v_{\text{и}} < 2F$  может быть выполнено при  $P_c/P_{\text{ш}} < 3$ . Если же  $P_c/P_{\text{ш}} \gg 3$ , то скорость выдачи символов источником можно сделать значительно больше  $2F_{\text{к}}$ , т. е. при  $P_c/P_{\text{ш}} \gg 3$  предел Найквиста можно превысить. Следует, однако, отметить, что на практике этот результат пока не достигнут.

5.1.1. Число информационных символов согласно (5.2)  $k = \log_2 N_p = \log_2 K = \log_2 32 = 5$ . Число проверочных символов  $r = n - k = 3$ . Используемый код содержит  $N_p = K = 32$  разрешенных кодовых комбинаций и  $N - K = 2^5 - 32 = 96$  запрещенных кодовых комбинаций.

5.1.2. Согласно (5.3)  $\kappa_{\text{к}} = 1 - (\log 32)/8 = 3/8$ . Согласно (5.4)  $R_{\text{к}} = 1 - 3/8 = 5/8$ .

5.1.5. Код содержит  $N_p = 2^h$  разрешенных комбинаций из общего числа  $N = 2^n$  комбинаций. Поскольку из-за ошибок при передаче любая из  $2^h$  разрешенных комбинаций может превратиться в любую из  $2^n$  комбинаций, всего имеется  $N_p N = 2^{h+n}$  переходов, включающих  $N_p = 2^h$  случаев безошибочных переходов. При передаче разрешенных комбинаций происходят  $N_p(N_p - 1) = 2^h(2^h - 1)$  переходов в другие разрешенные комбинации, что соответствует необнаруживаемым ошибкам. Переходы в запрещенные комбинации, число которых  $N_p(N - N_p) = 2^h(2^n - 2^h)$ , соответствуют обнаруживаемым ошибкам.

Следовательно, доля обнаруживаемых ошибок  $N_p(N - N_p)/N_p N = 1 - N_p/N = 1 - 2^{h-n}$ .

5.1.6. Если принятая запрещенная комбинация принадлежит подмножеству  $\mathbf{B}_i$ , считается, что передана комбинация  $\mathbf{b}_i$ . Ошибка будет исправлена в тех случаях, когда принятая комбинация действительно образовалась из  $\mathbf{b}_i$ . Таким образом, ошибки исправляются в  $(N - N_p)$  случаях. Доля исправляемых ошибок  $(N - N_p)/N_p(N - N_p) = 1/N_p$ . Любой код может применяться в качестве исправляющего при условии  $N_p < N$ .

5.1.13. Если при передаче некоторой разрешенной кодовой комбинации произошло  $q$  ошибок, то расстояние по Хеммингу между принятой и переданной комбинациями  $d = q$ . Так как между любыми двумя разрешенными кодовыми комбинациями расстояние по Хеммингу не меньше  $d_{\text{мин}}$ , то кодовая комбинация, отличающаяся от переданной в  $q = d_{\text{мин}} - 1$  разрядах, является запрещенной, и ошибки будут обнаружены. Сказанное поясняется на рис. Р.5.1, а.

Для доказательства того, что код с расстоянием  $d_{\text{мин}}$  может исправить  $q_{\text{и}} \leq 0,5d_{\text{мин}} - 1$  ошибок, достаточно убедиться, что среди

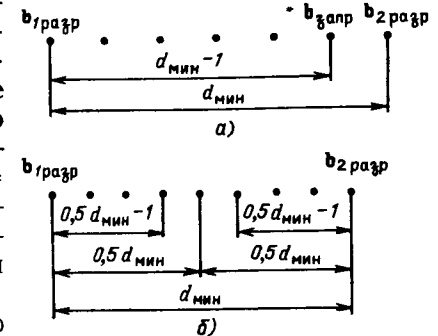


Рис. Р.5.1. К оценке обнаруживающей (а) и исправляющей (б) способности корректирующего кода



разрешенных кодовых комбинаций имеется только одна, которая могла бы превратиться в принятую запрещенную комбинацию.

Допустим, что существуют две разрешенные кодовые комбинации  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$ , которые при искажении  $0,5d_{\min}-1$  символов превращаются в одну и ту же запрещенную кодовую комбинацию  $\hat{\mathbf{b}}$ . Это означает, что  $d(\mathbf{b}_1, \hat{\mathbf{b}}) = 0,5d_{\min}-1 < 0,5d_{\min}$  и  $d(\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{b}}) = 0,5d_{\min}-1 < 0,5d_{\min}$ .

Для того чтобы из комбинации  $\mathbf{b}_1$  получить комбинацию  $\mathbf{b}_2$  необходимо изменить не более  $d(\mathbf{b}_1, \hat{\mathbf{b}}) + d(\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{b}})$  символов, так как выполняется условие  $d(\mathbf{b}_1, \hat{\mathbf{b}}) + d(\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{b}}) \leq d(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  (см. § 2.4). Поскольку при сделанном допущении  $d(\mathbf{b}_1, \hat{\mathbf{b}}) < 0,5d_{\min}$  и  $d(\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{b}}) < 0,5d_{\min}$ , имеем  $d(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) < d_{\min}$ , что противоречит определению  $d_{\min}$ . Следовательно, при числе ошибок  $q_n \leq 0,5d_{\min}-1$  принятой запрещенной комбинации может соответствовать лишь одна разрешенная комбинация. Но это означает, что все  $q_n$  ошибок могут быть исправлены. Правило декодирования в этом случае можно сформулировать так: если принята запрещенная комбинация, то считается переданной ближайшая к ней разрешенная комбинация. Сказанное поясняется рис. Р.5.1,б.

5.1.14. Указание к решению. Учесть, что кодовая комбинация в данном случае декодируется правильно, если число ошибок в ней не более двух.

5.1.15. Из восьми комбинаций заданного кода выбираем в качестве разрешенных комбинаций 000 и 111. Из-за ошибок (переход 0 в 1 и 1 в 0) и стираний (появление на приеме третьего символа «?») принятая комбинация отличается от переданной. Из 27 комбинаций на приеме 25 являются запрещенными и, следовательно, позволяют обнаружить некоторые ошибки и стирания,

Таблица Р51

Состояния источника, канала и способ декодирования	Состояние							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Символ источника	A	B	B	A	A	B	A	B
Переданная кодовая комбинация	000	111	111	000	000	111	000	111
Принятая кодовая комбинация	000	?11	010	0??	?10	000	1??	???
Расстояние по Хеммингу по нестертым символам	0	0	2	0	1	3	1	—
Декодирование с исправлением стираний и обнаружением ошибок	A	B	?	A	?	A (ош)	B (ош)	?
Декодирование с исправлением ошибок и стираний	A	B	A(ош)	A	A или B (ош)	A (ош)	B (ош)	B или A (ош)
Декодирование с исправлением стираний и ошибок, обнаружением ошибок	A	B	A(ош)	A	?	A (ош)	B (ош)	?

а часть из них исправить. Возможные ситуации на выходе декодера для различных состояний кодера, канала и способов декодирования приведены в табл. Р.5.1.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 5.2.

5.2.2. Сначала необходимо образовать примитивный 4-разрядный код. Число кодовых комбинаций такого кода  $N = K = 2^4 = 16$ . Одной из комбинаций такого кода будет  $\mathbf{b} = 0101$ . Для получения кодовой комбинации искомого кода необходимо к комбинации примитивного кода добавить три проверочных символа, определяемых, например матрицей

$$\mathbf{Y} = \begin{vmatrix} \gamma_{15} = 1 & \gamma_{25} = 1 & \gamma_{35} = 0 & \gamma_{45} = 1 \\ \gamma_{16} = 0 & \gamma_{26} = 1 & \gamma_{36} = 1 & \gamma_{46} = 1 \\ \gamma_{17} = 1 & \gamma_{27} = 1 & \gamma_{37} = 1 & \gamma_{47} = 0 \end{vmatrix}$$

Согласно (5.9) получим

$$b_{5, \text{пр}} = b_1 \oplus b_2 \oplus b_4; \quad b_{6, \text{пр}} = b_2 \oplus b_3 \oplus b_4; \quad b_{7, \text{пр}} = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3$$

(суммирование по модулю 2). В данном случае  $b_{5, \text{пр}} = 0$ ,  $b_{6, \text{пр}} = 0$ ,  $b_{7, \text{пр}} = 1$ . Кодовая комбинация кода (7, 4) — 0101001. Аналогично находятся и остальные комбинации кода (7, 4). Определив все комбинации, нетрудно показать, что  $d_{\min} = 3$ , приняв во внимание, что  $d_{\min}$  равно минимальному весу полученных кодовых комбинаций, не содержащих нули во всех разрядах [14].

5.2.3. Указания к решению. Использовать матрицу коэффициентов  $\gamma_{i,j}$  из задачи 5.2.2, а также (5.11) и (5.12).

5.2.4. Указание к решению. Для построения кодовых комбинаций необходимо перемножить вектор-строку примитивного 4-разрядного кода с производящей матрицей.

5.2.5. Согласно (5.11) и (5.12)

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Допустим, что была передана комбинация  $\mathbf{b} = |1000001|$ . Если ошибок в ней нет, то выполняется соотношение (5.13). Если в каком-либо разряде происходит ошибка, то (5.13) не выполняется. По виду результата в этом случае можно указать разряд, в котором произошла ошибка. Например, при ошибке в первом разряде для  $\mathbf{bH}^T$  получаем результат 001 для любой кодовой комбинации.

5.2.8. Указание к решению. Последовательно вводя ошибку в каждый информационный разряд, убедиться, что (5.13) не выполняется.

5.2.10. Осуществляя проверки по (5.13), легко убедиться, что оба кода исправляют одиночные ошибки. Правила формирования проверочных разрядов:

для первого кода

$$b_{8, пр} = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3 \oplus b_4 \oplus b_5; \quad b_{9, пр} = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3 \oplus b_5 \oplus b_7;$$

$$b_{10, пр} = b_1 \oplus b_2 \oplus b_4 \oplus b_5 \oplus b_7; \quad b_{11, пр} = b_1 \oplus b_3 \oplus b_4 \oplus b_5 \oplus b_6;$$

для второго кода

$$b_{8, пр} = b_4 \oplus b_5 \oplus b_6; \quad b_{9, пр} = b_2 \oplus b_3 \oplus b_6 \oplus b_7;$$

$$b_{10, пр} = b_1 \oplus b_3 \oplus b_5 \oplus b_7; \quad b_{11, пр} = b_1 \oplus b_2 \oplus b_4 \oplus b_5$$

Сравнение этих правил для первого и второго кодов показывает, что во втором случае необходимо иметь меньшее число сумматоров по модулю 2.

5.2.13. Производящая матрица для двойственного кода (7.3)

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Используя ее, можно для любой 3-разрядной информационной последовательности построить кодовую комбинацию. Например, для последовательности 111 имеем

$$\mathbf{b} = |1 \ 1 \ 1| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1|.$$

Аналогично можно получить остальные комбинации.

5.2.16. Нетрудно заметить, что во всех кодовых комбинациях

$$b_3 = b_1 \oplus b_2; \quad b_4 = b_1; \quad b_5 = b_1 \oplus b_2.$$

Так как все кодовые символы являются линейными комбинациями  $b_1$  и  $b_2$ , код является систематическим с проверкой на четность.

Порождающая матрица  $\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , проверочная

$$\text{матрица } \mathbf{H} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Вероятность ошибочного декодирования

$$p = 1 - (1 - p_0)^5 - 5p_0(1 - p_0)^4 - 2p_0^2(1 - p_0)^3.$$

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 5.3.

5.3.4. Указание к решению. Проверить выполнение соотношения (5.17).

5.3.8. Указание к решению. Проверить выполнение соотношения (5.19).

5.3.10. Так как число ненулевых членов порождающего многочлена равно 3,  $d_{\min}$  не может быть больше 3. Следовательно, код с  $d_{\min} = 5$  построен быть не может.

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 5.4.

5.4.2. Для заданного кода  $n = n_1 n_2 = 7 \cdot 7 = 49$ ;  $k = k_1 k_2 = 4 \cdot 4 = 16$ . Согласно (5.21)  $d_{\min} = d_1 d_2 = 3 \cdot 3 = 9$ .

5.4.5. Код (3/4) обнаруживает ошибки любой кратности, приводящие к изменению числа единиц. Не обнаруживаются лишь ошибки смещения, при которых некоторое число единиц переходит в нули, а такое же число нулей — в единицы. С учетом этого

$$p_{н.о} = C^1_3 p_0 (1 - p_0)^2 C^1_4 p_0 (1 - p_0)^3 + C^2_3 p_0^2 (1 - p_0) C^2_4 p_0^2 \times \\ \times (1 - p_0)^2 + C^3_3 p_0^3 C^3_4 (1 - p_0).$$

5.4.8. В рассматриваемом коде из общего числа комбинаций  $N = 64$  разрешенными являются  $K = 32$ . Следовательно,

$$\kappa_k = 1 - \log_2 K / \log_2 N = 0,168.$$

Вероятность обнаруживаемой ошибки равна сумме вероятностей появления ошибок нечетной кратности:  $p_{о.о} = C^1_6 p_0 (1 - p_0) + C^3_6 p_0^3 (1 - p_0)^3 + C^5_6 p_0^5 (1 - p_0)^5 \approx C^1_6 p_0 (1 - p_0)^5$ . Вероятность необнаруженной ошибки  $p_{н.о} = 1 - (1 - p_0)^6 - 6p_0(1 - p_0)^5$ .

5.4.13. Контрольные символы рекуррентного кода (1/2) найдем согласно условию (5.21):

$$b_{1,2} = 1; \quad b_{2,3} = 0; \quad b_{3,4} = 1; \quad b_{4,5}; \quad b_{5,6} = 0;$$

$$b_{6,7} = 1; \quad b_{7,8} = 0; \quad b_{8,9} = 0; \quad b_{9,10} = 1; \quad b_{10,11} = 0;$$

$$b_{11,12} = 1; \quad b_{12,13} = 1; \quad b_{13,14} = 1; \quad b_{14,15} = 1.$$

Кодовая последовательность кода (1/2) для данного случая 11000110101100000110110111011. Структурная схема кодера для этого кода показана на рис. Р.5.2,а; структурная схема декодера — на рис. Р.5.2,б. Алгоритм декодирования кода (1/2) можно сформулировать так: если условие (5.22) не выполняется для двух соседних проверочных символов, то необходимо изменить находящийся между ними информационный символ.

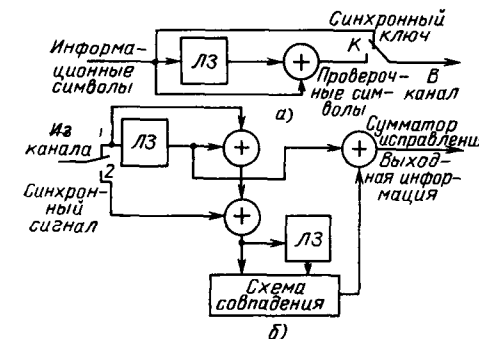


Рис. Р.5.2. Структурные схемы кодера (а) и декодера (б) для рекуррентного кода (1/2)

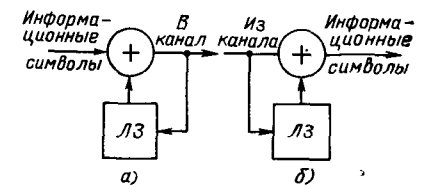
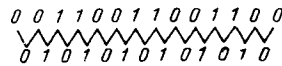


Рис. Р.5.3. Структурные схемы кодера (а) и декодера (б) для относительного кода

5.4.14. Кодирование двоичной информации для передачи по методу ОФМ осуществляется устройством, схема которого представлена на рис. Р.5.3,а.

В этой схеме каждый символ с выхода сумматора по модулю 2 задерживается на один такт и затем суммируется по модулю 2 со следующим символом входной последовательности. В начале работы на сумматор необходимо подать вспомогательный символ 0 или 1. Например, если на вход кодера поступает последовательность 010101010101..., последовательность на его выходе имеет вид 0011001100110011...

Декодирование осуществляется в схеме рис. Р.5.3,б. Здесь входные символы задерживаются на один такт и суммируются с последующими. В результате восстанавливается исходная комбинация



5.4.15. Так как на вход кодера рис. 5.2 одновременно поступает один информационный символ,  $k=1$ . За время, равное длительности одного символа на входе, образуются два символа на выходе. Поэтому  $n=2$ . Скорость кода  $R=1/2$ . Длина кодирующего регистра  $k=3$ . При  $R=1/2$   $v=k-1=2$ . Кодер рис. 5.2 характеризуется порождающими полиномами согласно (5.23)  $G^{(1)}(D)=D+D^2$ ;  $G^{(2)}(D)=1+D+D^2$ . Записывая последовательность коэффициентов в виде двоичных комбинаций, получаем  $G^{(1)}=011$ ;  $G^{(2)}=111$ .

5.4.18. Представим порождающую матрицу кодера согласно (5.24) в виде

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

Записывая информационную последовательность в виде вектора-строки  $U = |1101\dots|$ , согласно (5.25) находим

$$B = UG = |1101\dots| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ & & & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ & & & & 0 & 1 & 1 & \dots \\ & & & & & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix} = |01100010\dots|$$

5.4.19. Указание к решению. Рассмотреть прохождение единичной последовательности  $u=1000\dots$  через кодер и составить последовательность символов  $b^{(1)}$  и  $b^{(2)}$ , образующих импульсный отклик  $h$ .

5.4.20. Указание к решению. Проверить выполнение условия (5.26).

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 6.1.

6.1.1. Функции правдоподобия передачи символов  $b_1$  и  $b_2$  при заданном отсчете  $z(t)$  определяются одномерными плотностями вероятности:

$$\omega_1(z|b_1) = \exp(-z^2/2\sigma^2)/\sqrt{2\pi\sigma^2},$$

$$\omega_1(z|b_2) = \exp(-(z-a)^2/2\sigma^2)/\sqrt{2\pi\sigma^2}.$$

В условиях задачи алгоритм (6.3) можно записать так:

$$P(b_1) \exp(-z^2/2\sigma^2) \stackrel{b_1}{\cong} P(b_2) \exp(-(z-a)^2/2\sigma^2). \quad (P.6.1)$$

Подставляя сюда значения  $P(b_1)$ ,  $P(b_2)$ ,  $z$ ,  $a$ ,  $\sigma^2$ , находим

$$P(b_1) \exp(-z^2/2\sigma^2) = 0,435; \quad P(b_2) \exp(-(z-a)^2/2\sigma^2) = 0,392.$$

Следовательно, приемник примет решение в пользу символа  $b_1$  и зарегистрирует его.

После логарифмирования соотношение (P.6.1) можно записать так:

$$-z^2/2\sigma^2 + \ln P(b_1) \stackrel{b_1}{\cong} -(z-a)^2/2\sigma^2 + \ln P(b_2). \quad (P.6.2)$$

После элементарных преобразований алгоритм приема примет вид

$$z \stackrel{b_2}{\cong} U_0, \quad (P.6.3)$$

где  $U_0$  — пороговый уровень, при превышении которого отсчетом  $z(t)$  регистрируется символ  $b_2$ , а в противном случае —  $b_1$ ;  $U_0 = \frac{\sigma^2}{a} \ln \frac{P(b_1)}{P(b_2)} + \frac{a}{2}$ .

Структурная схема приемника, реализующего алгоритм (P.6.3), показана на рис. Р.6.1. Она содержит следующие блоки: Г — генератор очень коротких тактовых импульсов с частотой следования  $1/T$ , которые осуществляют выборку отсчетов входной смеси  $z(t)$ ; К — ключ, осуществляющий квантование во времени вход-

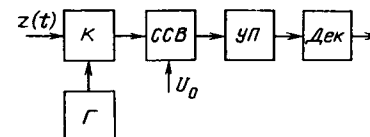


Рис Р.6.1 Структурная схема оптимального приемника по одному отсчету при точно известном сигнале

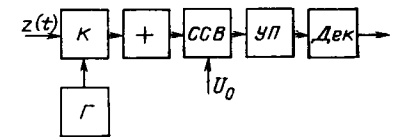


Рис Р.6.2 Структурная схема оптимального приемника по трем отсчетам при точно известном сигнале

ной смеси; ССВ — схема сравнения с порогом  $U_0$  и выбора решения (если  $z > U_0$  регистрируется символ  $b_2$ , в противном случае —  $b_1$ ); УП — устройство памяти (хранения) регистрируемых элементарных символов; Дек — декодирующее устройство.

6.1.3. Аналогично (Р.6.2) интересующий нас алгоритм приема можно записать в виде

$$-(z-a)^2/2\sigma^2 + \ln P(b_1) \underset{b_2}{\overset{b_1}{\cong}} -(z+a)^2/2\sigma^2 + \ln P(b_2)$$

или, после тождественных преобразований,

$$z \underset{b_2}{\overset{b_1}{\cong}} U_0, \quad U_0 = \frac{\sigma^2}{2a} \ln \frac{P(b_2)}{P(b_1)}.$$

Если вероятности передачи символов равны, то оптимальный порог для анализируемых сигналов  $U_0=0$ .

6.1.5. Функции правдоподобия передачи символов  $b_1$  и  $b_2$  при заданных отсчетах  $z_1, z_2$  и  $z_3$  определяются трехмерными плотностями вероятности:

$$\omega_3(z|b_1) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^3 \exp \left[ -\frac{(z_1-a)^2}{2\sigma^2} - \frac{(z_2-a)^2}{2\sigma^2} - \frac{(z_3-a)^2}{2\sigma^2} \right];$$

$$\omega_3(z|b_2) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^3 \exp \left[ -\frac{(z_1+a)^2}{2\sigma^2} - \frac{(z_2+a)^2}{2\sigma^2} - \frac{(z_3+a)^2}{2\sigma^2} \right].$$

Согласно (6.3) и после элементарных преобразований алгоритм приема запишем в виде

$$z_1 + z_2 + z_3 \underset{b_2}{\overset{b_1}{\cong}} U_0, \quad U_0 = \frac{\sigma^2}{2a} \ln \frac{P(b_2)}{P(b_1)}.$$

При равновероятных символах порог  $U_0=0$ . Схема приемника будет отличаться от схемы рис. Р.6.1 наличием блока суммирования (интегрирования) отсчетов входного сигнала \* (рис. Р.6.2). Генератор  $\Gamma$  должен выдавать короткие импульсы с частотой следования  $3/T$ .

6.1.6. Функционал правдоподобия передачи символа  $b_i$  при фиксации  $z(t)$  с учетом (3.5) и (6.8) можно записать в виде

$$\omega(z|b_i) = K \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - s_i(t)]^2 dt \right]. \quad (P.6.4)$$

Тогда согласно (6.4) следует алгоритм приема (6.9). На рис. Р.6.3 показана схема, реализующая этот алгоритм. Она содержит:  $m$  генераторов  $\Gamma$  опорных сигналов  $s_i(t)$ ;  $m$  вычитающих устройств ВУ;  $m$  квадраторов  $\kappa\theta$ , на выходе которых в момент  $t$  напряжение равно  $[z(t) - s_i(t)]^2$ ;  $m$  интеграторов \*\* « $\int$ »; схему сравнения и выбора решения ССВ; устройство памяти кодовых сим-

\* После принятия решения сумматор надо привести к нулевым начальным условиям

\*\* После вынесения решения интегрирующие устройства в оптимальной схеме должны быть приведены к нулевым начальным условиям.

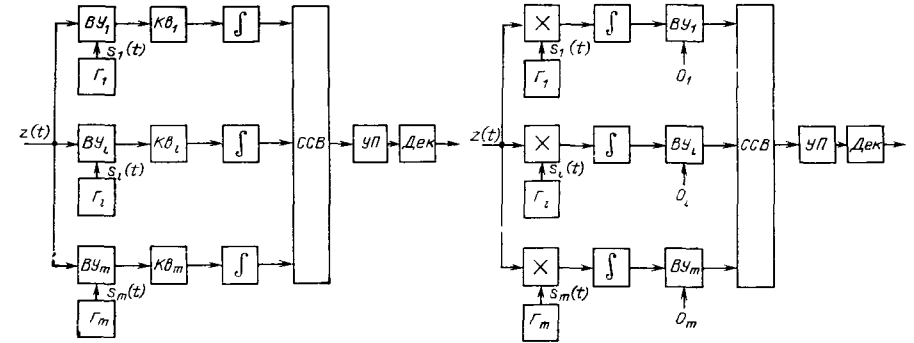


Рис. Р.63. Реализация оптимального приемного устройства по правилу максимального правдоподобия при точно известном ансамбле сигналов

Рис. Р.64 Структурная схема корреляционного приемника при точно известном ансамбле сигналов

волов УП; декодер. Если все символы имеют равные вероятности, то алгоритм приема

$$\int_0^T [z(t) - s_i(t)]^2 dt \underset{b_j}{\overset{b_i}{\cong}} \int_0^T [z(t) - s_j(t)]^2 dt \quad (P.6.5)$$

и нет необходимости в вычитающих устройствах с опорными сигналами  $N_0 \ln P(b_i)$ .

6.1.7. Раскрыв в (6.9) квадратные скобки и выполнив элементарные преобразования, получим алгоритм (6.10), который реализуется с помощью схемы, называемой корреляционной, поскольку основные операции над входным сигналом сводятся к определению интегралов  $\int_0^T z(t)s_i(t)dt$  (корреляционные функции между  $z(t)$  и  $s_i(t)$ ).

Схема содержит:  $m$  генераторов  $\Gamma$  сигналов  $s_i(t)$ ;  $m$  перемножителей « $\times$ »;  $m$  интеграторов « $\int$ »;  $m$  вычитающих устройств ВУ с опорными сигналами  $O_i = [E_i - N_0 \ln P(b_i)]/2$ ; схему сравнения с пороговым уровнем и выбора решения ССВ; устройство памяти УП; декодер Дек (рис. Р.6.4). Если символы равновероятны, а сигналы  $s_i(t)$  имеют равные энергии, то отпадает необходимость в устройствах вычитания ВУ.

6.1.8. Если число символов равно двум, то из  $(m-1)$  неравенств, определяющих алгоритм (6.10), остается лишь одно неравенство, которое после элементарных преобразований сводится к (6.11). Алгоритм (6.11) реализуется одноканальной схемой (рис.

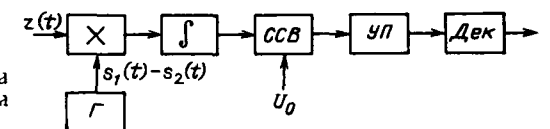


Рис. Р.65. Структурная схема корреляционного приемника для двоичных сигналов

Р.6.5), содержащей: генератор  $\Gamma$  опорного сигнала  $s_{оп}(t) = s_1(t) - s_2(t)$ ; множитель « $\times$ »; интегратор « $\int$ »; схему сравнения с пороговым уровнем  $U_0 = \frac{1}{2} [E_1 - E_2 + N_0 \ln \frac{P(0)}{P(1)}]$  и выбора решения ССВ. Если  $P(0) = P(1)$ , то  $U_0 = (E_1 - E_2)/2$ . Для двоичной системы с пассивной паузой  $s_2(t) = 0$ ,  $E_2 = 0$ ,  $U_0 = 0,5E_1$  и алгоритм приема будет иметь вид

$$\int_0^T z(t) s_1(t) dt \stackrel{1}{\geq} E_1/2.$$

Для двоичной системы с активной паузой  $U_0 = 0$ . Для системы с противоположными сигналами алгоритм приема будет иметь вид

$$\int_0^T z(t) s_1(t) dt \stackrel{1}{\geq} 0. \quad (P.6.6)$$

6.1.10. Учитывая алгоритм (6.2), найдем границу между собственными областями  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  из условия  $P(b_1) \omega(z|b_1) = P(b_2) \times \omega(z|b_2)$ . Подставив сюда выражения для функционалов  $\omega(z|b_i)$ , согласно (P.6.4) получим

$$P(b_1) K \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - s_1(t)]^2 dt \right\} = \\ = P(b_2) K \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - s_2(t)]^2 dt \right\}.$$

Логарифмируя, приводим это равенство к виду

$$\ln P(b_1) - \frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - s_1(t)]^2 dt = \ln P(b_2) - \frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - s_2(t)]^2 dt$$

или

$$\int_0^T [z(t) - s_1(t)]^2 dt - \int_0^T [z(t) - s_2(t)]^2 dt = N_0 \ln \frac{P(b_1)}{P(b_2)}.$$

Величина  $\int_0^T [z(t) - s_1(t)]^2 dt$  определяет в пространстве Гильберта квадрат расстояния между точками пространства, соответствующими принятой реализации  $z(t)$  и сигналу  $s_1(t)$  (см. § 2.4). Следовательно, уравнение границы между собственными областями сигналов согласно критерию минимума средней вероятности ошибки можно записать

$$\|z - s_1\|^2 - \|z - s_2\|^2 = N_0 \ln (P(b_1)/P(b_2)),$$

откуда следует, что граница между собственными областями сигналов — это линия, являющаяся геометрическим местом точек, разность квадратов расстояний которых до точек сигналов имеет постоянную величину  $N_0 \ln [(b_1)/P(b_2)]$ . Нетрудно убедиться в том, что это перпендикуляр, проходящий через отрезок, соединяющий точки  $s_1$  и  $s_2$  (рис. P.6.6).

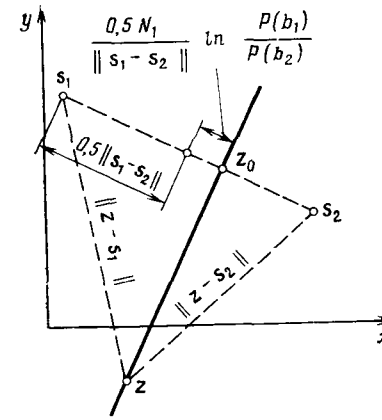


Рис P 66 К оптимальному разбиению пространства двух сигналов по критерию идеального наблюдателя

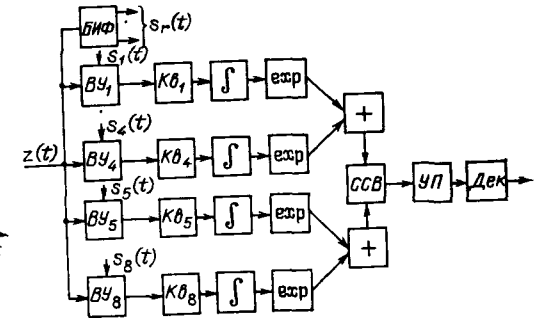


Рис P 67 Структурная схема оптимального приемника для канала с памятью

Найдем расстояния от основания перпендикуляра (точка  $z_0$ ) до точек  $s_1$  и  $s_2$ . Очевидно,  $\|z_0 - s_1\|^2 - \|z_0 - s_2\|^2 = N_0 \ln [P(b_1)/P(b_2)]$ . С другой стороны,  $\|z_0 - s_1\| + \|z_0 - s_2\| = \|s_1 - s_2\|$ . Поделив первое равенство на второе, получим

$$\|z_0 - s_1\| - \|z_0 - s_2\| = \frac{N_0 \ln \frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{\|s_1 - s_2\|}.$$

Теперь нетрудно получить:

$$\|z_0 - s_1\| = \frac{1}{2} \|s_1 - s_2\| + \frac{1}{2} N_0 \frac{\ln [P(b_1)/P(b_2)]}{\|s_1 - s_2\|}, \\ \|z_0 - s_2\| = \frac{1}{2} \|s_1 - s_2\| - \frac{1}{2} N_0 \frac{\ln [P(b_1)/P(b_2)]}{\|s_1 - s_2\|}.$$

Очевидно, что при  $P(b_1) = P(b_2)$  граница между собственными областями  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  будет представлять собой перпендикуляр, проходящий через середину отрезка, соединяющего сигнальные точки.

6.1.13. В данном случае  $D=L=1$  (перекрываются могут только сигналы, соответствующие соседним кодовым посылкам). На интервале анализа  $T_a = 2T$  имеется всего  $2^{D+L+1}$  реализаций сигналов  $s_{r,i}(t)$ , соответствующих передаче 1 или 0 до анализируемого сигнала и 1 или 0 после анализируемого. Реализация  $s_1(t) = s_{111}(t) = g_2(t)h(t) + g_1(t)h(t) + g_2(t-T)h(t-T) + g_1(t-T)h(t-T)$  соответствует передаче 1 анализируемым сигналом, а также 1 до и после него;

$$s_2(t) = s_{011}(t) = -g_2(t)h(t) + g_1(t)h(t) + g_2(t-T)h(t-T) + \\ + g_1(t-T)h(t-T); \quad s_3(t) = s_{010}(t) = -g_2(t)h(t) + \\ + g_1(t)h(t) + g_2(t-T)h(t-T) - g_1(t-T)h(t-T);$$

$$s_4(t) = s_{110}(t) = g_2(t)h(t) + g_1(t)h(t) + g_2(t-T)h(t-T) - g_1(t-T)h(t-T);$$

$$s_5(t) = s_{000}(t) = -s_1(t); \quad s_6(t) = s_{001}(t) = -s_4(t);$$

$$s_7(t) = s_{100}(t) = -s_2(t); \quad s_8(t) = s_{101}(t) = -s_3(t).$$

Согласно (6.3) с учетом (6.6) и (6.8) получаем при белом стационарном шуме алгоритм оптимального приема

$$\sum_{r=1}^4 \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^{2T} [z(t) - s_r(t)]^2 dt \right\} \stackrel{1}{\cong} \sum_{r=5}^8 \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^{2T} [z(t) - s_r(t)]^2 dt \right\}, \quad (P.6.7)$$

или

$$\sum_{r=1}^4 \exp \left[ \frac{2}{N_0} \int_0^{2T} z(t) s_r(t) dt - E_r/2 \right] \stackrel{1}{\cong} \sum_{r=5}^8 \exp \left[ \frac{2}{N_0} \int_0^{2T} z(t) s_r(t) dt - E_r/2 \right], \quad (P.6.8)$$

$$\text{где } E_r = \int_0^{2T} s_r^2(t) dt.$$

На рис. P.6.7 показана структурная схема приемника, реализующего алгоритм (P.6.7). Она содержит: блок измерения характеристик канала и формирования из принимаемой смеси  $z(t)$  необходимых для функционирования приемника сигналов синхронизации и восьми опорных сигналов  $s_r(t)$  БИФ; вычитающие устройства ВУ; квадраторы Кв, интеграторы « $\int$ », нелинейные устройства с экспоненциальной характеристикой « $\exp$ »; сумматоры «+»; схему сравнения с пороговым уровнем и выбора решения ССВ; устройство памяти УП; декодер Дек. Сравнивая (P.6.5) и (P.6.7), отмечаем, что в отличие от канала без памяти для реализации оптимального приема в канале с межсимвольной интерференцией требуется знание энергетического спектра шума в канале. При этом строго оптимальная схема в таком канале непременно содержит нелинейные блоки.

6.1.14. Если имеется «идеальная» обратная связь по решению (по зарегистрированным символам можно точно восстановить сигнал «хвоста»  $g_{ост}(t)$  от предшествующих символов), то можно подвергнуть анализу колебания  $z_a(t) = z(t) - g_{ост}(t)$ . При  $D=1$  ( $T_a=2T$ ) на интервале анализа могут быть образованы четыре реализации:  $s_1(t) = s_{11}(t) = g_1(t)h(t) + g_2(t-T)h(t-T) + g_1(t-T) \times h(t-T)$ , что соответствует передаче 1 анализируемым сигналом и 1 после него;

$$s_2(t) = s_{10}(t) = g_1(t)h(t) + g_2(t-T)h(t-T) - g_1(t-T)h(t-T);$$

$$s_3(t) = s_{01}(t) = -s_2(t); \quad s_4(t) = s_{00}(t) = -s_1(t).$$

Согласно (6.3) с учетом (6.7) и (6.8) получаем при белом стационарном шуме алгоритм оптимального приема

$$\sum_{r=1}^2 \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^{2T} [z_a(t) - s_r(t)]^2 dt \right\} \stackrel{1}{\cong} \sum_{r=3}^4 \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^{2T} [z_a(t) - s_r(t)]^2 dt \right\}. \quad (P.6.9)$$

Рис. P.6.8. Структурная схема приемника с обратной связью по решению

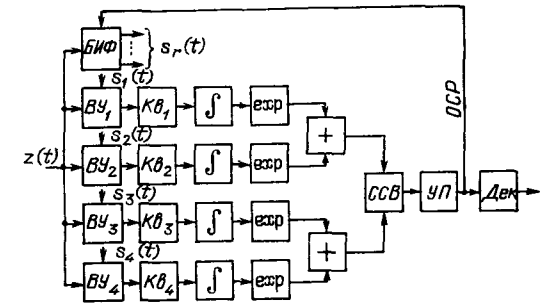
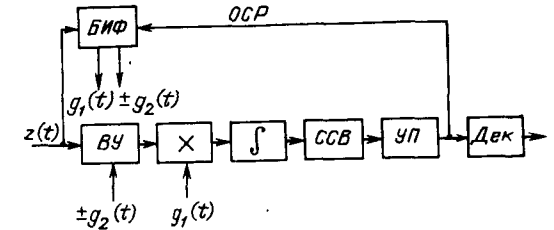


Рис. P.6.9. Структурная схема оптимального приемника двоичных сигналов для канала с памятью



На рис. P.6.8 показана структурная схема приемника, реализующего алгоритм (P.6.9). От схемы рис. P.6.7 она отличается наличием обратной связи по решению (ОСР) от блока УП до блока БИФ. В последнем, помимо четырех опорных сигналов  $s_r(t)$ , формируется также сигнал  $g_{ост}(t) = \pm g_2(t)h(t)$ . Знак этого сигнала при анализе очередного символа определяется тем, были ли при анализе предыдущего символа зафиксированы в УП 1 или 0.

6.1.15. Если имеется «идеальная» обратная связь по решению и  $D=0$ , то на интервале анализа  $T_a=T$  две реализации сигнала, соответствующие передаче 1 и 0, определяются так:

$$s_1(t) = g_1(t); \quad s_2(t) = -g_1(t).$$

В этом случае алгоритм оптимального приема

$$\int_0^T [z(t) \pm g_2(t)] g_1(t) dt \stackrel{1}{\cong} 0 \quad (P.6.10)$$

реализуется линейной схемой рис. P.6.9. Блок БИФ, охваченный обратной связью по решению, формирует по результатам измерения характеристик канала элементы  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$ . Знак при  $g_2(t)$  в (P.6.10) определяется тем, были ли зарегистрированы при анализе предшествующего символа 1 или 0.

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 6.2.

6.2.1. Согласно (6.13) импульсная переходная характеристика согласованного фильтра является зеркальным отражением сигнала относительно точки  $t_0$ . Следовательно, в данном случае

$$g(t) = k(T-t), \quad 0 < t < T.$$

График этой функции показан на рис. P.6.10.

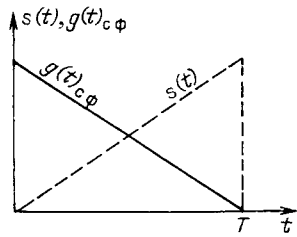


Рис Р 610 Импульсная переходная характеристика фильтра, согласованного с линейно нарастающим сигналом

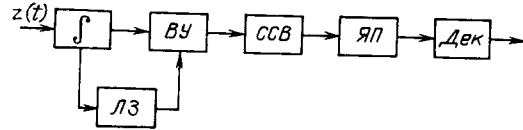


Рис Р 611 Структурная схема оптимального приемника с согласованным фильтром для одиночного прямоугольного импульса

6.2.3. Согласно (6.18) в момент окончания входного сигнала на выходе согласованного фильтра получается напряжение, пропорциональное сигналу на выходе интегратора корреляционного приемника. Следовательно, оптимальное приемное устройство при точно известном сигнале можно реализовать на базе согласованных фильтров.

Рассмотрим пример построения согласованного фильтра для прямоугольного видеопульса, заданного в виде  $s(t) = A$ , при  $0 \leq t \leq T$ ;  $s(t) = 0$  при  $t < 0$ ,  $t > T$ . Спектр по Фурье для такого импульса определяется соотношением  $S(j\omega) = \frac{aA}{j2\pi f} (1 - e^{-j2\pi f T})$ . На основании (6.15) для коэффициента передачи согласованного фильтра получим

$$K(j\omega) = \frac{aA}{-j2\pi f} (1 - e^{j2\pi f T}) e^{-j2\pi f T} = \frac{aA}{j2\pi f} (1 - e^{-j2\pi f T}).$$

Известно, что умножение на  $1/(j2\pi f)$  в частотной области соответствует интегрированию в пределах от  $-\infty$  до  $t$  во временной области, а умножение на  $e^{-j2\pi f T}$  соответствует задержке сигнала на время  $T$ . Следовательно, фильтр, согласованный с одиночным прямоугольным импульсом, состоит из интегратора « $\int$ », линии задержки ЛЗ на время  $T$  и вычитающего устройства ВУ. Структурная схема оптимального приемника с таким фильтром показана на рис. Р.6.11. На схеме ЯП — ячейка памяти.

6.2.4. В рассматриваемом случае корреляционные устройства в оптимальном приемнике должны быть заменены фильтрами, согласованными с радиоимпульсами, имеющими частоты заполнения  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . В качестве примера найдем импульсную переходную характеристику фильтра, согласованного с сигналом:

$$s_1(t) = U_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad 0 \leq t \leq T,$$

и рассмотрим его возможную реализацию. Выбирая  $t_0 = T$ , согласно (6.13) можно записать

$$g(t) = aU_m \cos(\omega_1 t_0 + \varphi_1 - \omega_1 t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Такая характеристика может быть реализована с помощью высокодобротного ( $Q \gg 1$ ) колебательного контура при условии, что для частоты  $\omega_1$  он создает фазовый сдвиг  $-\omega_1 t_0 - \varphi_1$ . Структурная схема оптимального приемника показана на рис. Р.6.12. Ключ  $K$  в момент  $t = t_0 = T$  на очень короткое время закорачивает емкость и разрывает цепь с индуктивностью для освобождения контура от накопленной энергии и его подготовки к приему следующих элементов сигнала\*.

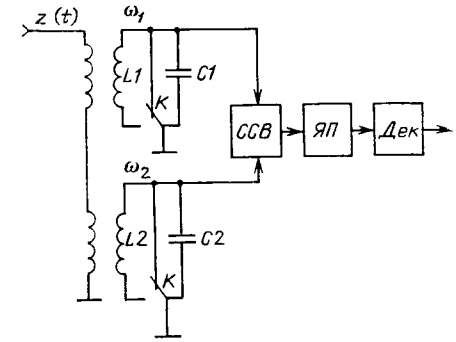


Рис Р 612 Реализация оптимального по правилу максимального правдоподобия приемника ЧМ-сигналов на основе согласованных фильтров

6.2.5. Любую финитную функцию  $s(t)$  можно аппроксимировать последовательностью из  $n = T/\Delta$  прямоугольных импульсов малой длительности  $\Delta$  и высоты  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) (рис. Р.6.13,а). Величина  $\Delta \leq 1/(2F_c)$  и определяется допустимой точностью аппроксимации.

Если на вход (точка А) линии задержки с отводами через интервалы  $\Delta$  подадим в момент  $t = 0$  импульс с длительностью  $\Delta$  единичной высоты и просуммируем с весами  $a_k$  значения сигналов в отводах линии (рис. Р.6.13,б), то на выходе сумматора получим сигнал  $s(t)$ . Фильтр нижних частот подавляет спектральные компоненты, лежащие вне полосы сигнала  $F_c$ .

Если единственный импульс подвести к выходу линии (точка В), отклик будет зеркальным отражением сигнала  $s(t)$ , и схема рис. Р.6.13,б будет выполнять роль согласованного фильтра.

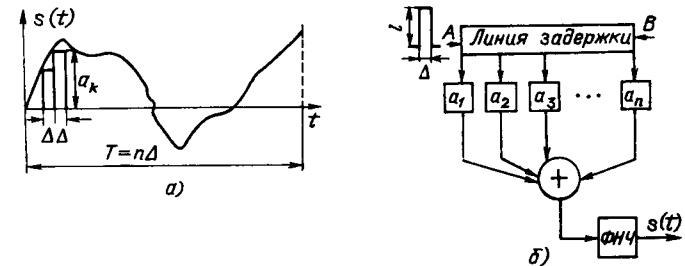


Рис Р 613 Реализация фильтра, согласованного с произвольным непрерывным сигналом, на основе линии задержки с отводами и блоками взвешивания: а — сигнал, б — согласованный фильтр

\* Такой вариант согласованного фильтра называется коммутируемым. В принципе, можно построить согласованный фильтр и без коммутации параметров. В этом случае фильтр называют пассивным.

6.2.9. Пусть на вход линейной системы, осуществляющей обработку сигнала в соответствии с алгоритмом  $y(t) = \int_0^T z(\tau) s(\tau) d\tau$ , поступает смесь сигнала и гауссовского стационарного шума  $z(t) = s(t) + n(t)$ , причем  $s(t) \neq 0$  при  $0 \leq t \leq T$ . В момент окончания сигнала  $t = T$  сигнальная компонента на выходе заданной линейной системы  $y_c(t) = \int_0^T s^2(\tau) d\tau = P_c T = E$  ( $E$  — энергия сигнала на входе). Шумовая компонента на выходе заданной линейной системы  $y_n(t) = \int_0^T n(\tau) s(\tau) d\tau$  представляет собой гауссовский процесс с дисперсией  $\overline{y_n^2(t)} = N_0 E / 2$  ( $N_0$  — спектральная плотность мощности шума на входе). Отношение сигнал-шум на выходе заданной линейной системы в момент  $t = T$

$$\rho_{\text{вых}} = y_c^2(T) / \overline{y_n^2(t)} = 2E / N_0 = 2h^2 = 2P_c T / N_0 = 2FT (P_c / P_{\text{ш}})_{\text{вх}}.$$

Полученный результат справедлив для согласованного фильтра и коррелятора.

6.2.10. Согласно (6.16) выигрыш в отношении сигнал-шум, даваемый согласованным фильтром,  $\rho_{\text{вых}} / (P_c / P_{\text{ш}})_{\text{вх}} = 2FT = 2 \cdot 20 \times 10^{-3} \cdot 10^4 = 400$ .

#### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 6.3.

6.3.1. Согласно решению задачи 6.1.1 правило решения приемника имеет вид  $z \leq U_0$ , где порог  $U_0 = (\sigma^2/a) \ln[P(b_1)/P(b_2)] + 0,5a$ . Отсчеты смеси детерминированного сигнала и шума  $z$  имеют гауссовское распределение, дисперсию  $\sigma^2$  и математическое ожидание  $a$  (при передаче символа  $b_2$ ) или 0 (при передаче символа  $b_1$ ). Условные плотности вероятности отсчетов при передаче символов  $b_1$  и  $b_2$  равны соответственно

$$w(z|b_1) = (2\pi\sigma^2)^{-0,5} \exp(-0,5z^2/\sigma^2);$$

$$w(z|b_2) = (2\pi\sigma^2)^{-0,5} \exp(-0,5(z-a)^2/\sigma^2).$$

Найдем вероятности ошибочных переходов  $P(\hat{b}_1|b_2)$  и  $P(\hat{b}_2|b_1)$ :

$$\begin{aligned} P(\hat{b}_2|b_1) &= P(z > U_0|b_1) = \int_{U_0}^{\infty} w(z|b_1) dz = \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-0,5} \int_{U_0}^{\infty} \exp(-0,5z^2/\sigma^2) dz = 0,5 [1 - \Phi(U_0/\sigma)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\hat{b}_1|b_2) &= P(z < U_0|b_2) = \int_{-\infty}^{U_0} w(z|b_2) dz = \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-0,5} \int_{-\infty}^{U_0} \exp[-0,5(z-a)^2/\sigma^2] dz = \\ &= 0,5 [1 - \Phi((U_0 - a)/\sigma)]. \end{aligned}$$

Здесь  $\Phi(x)$  — функция Крампса. Средняя вероятность ошибки

$$\begin{aligned} p_{\text{ош}} &= P(b_1) P(\hat{b}_2|b_1) + P(b_2) P(\hat{b}_1|b_2) = \\ &= 0,5 \{P(b_1) [1 - \Phi(U_0/\sigma)] + P(b_2) [1 - \Phi((U_0 - a)/\sigma)]\}. \end{aligned}$$

6.3.4. Условия правильного приема символа  $b_1$  в многопозиционной системе, использующей ортогональные сигналы с активной паузой, согласно решению задачи 6.1.7 такие:

$$\int_0^T z(t) s_1(t) dt > \int_0^T z(t) s_i(t) dt; \quad i = 2, 3, 4, \dots, m.$$

Поскольку  $z(t) = s_1(t) + n(t)$ ,  $\int_0^T s_1(t) s_i(t) dt = 0$  и  $\int_0^T s_1^2(t) dt = E$ , то

эти условия можно записать так:  $\int_0^T n(t) [s_1(t) - s_i(t)] dt > -E$  или  $\Theta_i < \Theta_1 + E$ , где  $\Theta_i = \int_0^T s_i(t) n(t) dt$ .

Случайная величина  $\Theta_i = \int_0^T s_i(t) n(t) dt$  распределена по гауссовскому закону, имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию  $\overline{\Theta_i^2} = N_0 E / 2$ . Вероятность выполнения неравенства  $\Theta_i < \Theta_1 + E$  будет равна

$$\begin{aligned} P(\Theta_i < \Theta_1 + E) &= \int_{-\infty}^{\Theta_1 + E} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Theta_i^2}} \exp\left(-\frac{\Theta_i^2}{2\Theta_i^2}\right) d\Theta_i = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E}} \int_{-\infty}^{\Theta_1 + E} \exp\left(-\frac{\Theta_i^2}{N_0 E}\right) d\Theta_i = 0,5 [1 + \Phi(t + \sqrt{2h^2})], \end{aligned}$$

где  $t = \Theta_1 / \sqrt{N_0 E / 2}$ ;  $h^2 = E / N_0$ .

Вероятность того, что во всех  $m-1$  ветвях значения  $\Theta_i$  не превысят значения  $\Theta_1$ , равна  $(1/2)^{m-1} [1 + \Phi(t + \sqrt{2h^2})]^{m-1}$ . Усредняя это выражение по всем возможным значениям  $\Theta_1$ , получаем вероятность правильного приема

$$p_{\text{прав}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \{0,5 [1 + \Phi(t + \sqrt{2h^2})]\}^{m-1} dt.$$

Вероятность ошибки в  $m$ -позиционной системе

$$\begin{aligned} p_{\text{ош}, m} &= 1 - p_{\text{прав}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \times \\ &\times \left[ \frac{1}{2} + 0,5 \Phi(t + \sqrt{2h^2}) \right]^{m-1} dt. \end{aligned}$$

При больших значениях  $h^2$  это выражение можно привести к виду

$$p_{\text{ош}, m} \approx 0,5 (m-1) [1 - \Phi(\sqrt{h^2})].$$



6.3.5. Согласно решению задачи 6.1.8 можно записать алгоритм работы оптимального приемника двоичных сигналов:

$$\int_0^T z(t) [s_1(t) - s_2(t)] dt \underset{b_2}{\overset{b_1}{\approx}} 0,5 \left[ E_1 - E_2 + N_0 \ln \frac{P(b_2)}{P(b_1)} \right].$$

Здесь  $E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt$  — энергия сигнала  $s_i(t)$ .

Если действительно был передан символ  $b_1$ , то  $z(t) = s_1(t) + n(t)$  и событию, заключающемуся в правильной регистрации переданного символа, будет соответствовать неравенство

$$\int_0^T n(t) [s_1(t) - s_2(t)] dt > -0,5 \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt + 0,5 N_0 \ln \frac{P(b_2)}{P(b_1)}.$$

Вероятность ошибки определится вероятностью выполнения обратного неравенства, т. е.

$$\int_0^T n(t) [s_1(t) - s_2(t)] dt < -0,5 \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt + 0,5 N_0 \ln \frac{P(b_2)}{P(b_1)}.$$

Обозначим  $\int_0^T n(t) [s_1(t) - s_2(t)] dt = \Theta$ ;  $\int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt = E_3$  и запишем полученное неравенство в виде

$$\Theta < -0,5 \left[ E_3 + N_0 \ln \frac{P(b_2)}{P(b_1)} \right].$$

Так как шум в канале гауссовский и имеет нулевое математическое ожидание, то  $\Theta$  является гауссовской случайной величиной с параметрами  $\bar{\Theta} = 0$  и  $\sigma^2_{\Theta} = \frac{N_0}{2} E_3$ . Теперь можно записать выражение для вероятности  $P(\hat{b}_2 | b_1)$ :

$$P(\hat{b}_2 | b_1) = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2} \left[ E_3 + N_0 \ln \frac{P(b_2)}{P(b_1)} \right]} w(\Theta) d\Theta = \frac{1}{2} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{E_3 + N_0 \ln \frac{P(b_2)}{P(b_1)}}{\sqrt{2N_0 E_3}} \right) \right].$$

Аналогично находим

$$P(\hat{b}_1 | b_2) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{E_3 - N_0 \ln \frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{\sqrt{2N_0 E_3}} \right) \right].$$

Средняя вероятность ошибки

$$p_{\text{ош}} = P(b_1) \frac{1}{2} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{E_3 + N_0 \ln \frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{\sqrt{2N_0 E_3}} \right) \right] + P(b_2) \frac{1}{2} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{E_3 - N_0 \ln \frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{\sqrt{2N_0 E_3}} \right) \right].$$

Для системы с пассивной паузой (АМ)  $s_1(t) \neq 0$ ,

$$s_2(t) = 0, E_3 = \int_0^T s_1^2(t) dt = E_1. \text{ При этом}$$

$$P_{\text{ош}} = P(b_1) \frac{1}{2} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{E_1 + N_0 \ln \frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{\sqrt{2N_0 E_1}} \right) \right] + P(b_2) \frac{1}{2} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{E_1 - N_0 \ln \frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{\sqrt{2N_0 E_1}} \right) \right].$$

При использовании ортогональных сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  с одинаковыми энергиями  $E_1 = E_2 = E$  (система с активной паузой) имеем

$$E_3 = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt = \int_0^T s_1^2(t) dt - 2 \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt + \int_0^T s_2^2(t) dt = 2E \text{ и}$$

$$p_{\text{ош}} = 0,5 P(b_1) \left[ 1 - \Phi \left( \frac{2E + N_0 \ln [P(b_1)/P(b_2)]}{\sqrt{N_0 E}} \right) \right] + 0,5 P(b_2) \left[ 1 - \Phi \left( \frac{2E - N_0 \ln [P(b_1)/P(b_2)]}{2\sqrt{N_0 E}} \right) \right].$$

При использовании противоположных сигналов  $s_1(t) = -s_2(t)$  имеем

$$E_3 = \int_0^T 4s_1^2(t) dt = 4E \text{ и}$$

$$p_{\text{ош}} = 0,5 P(b_1) \left[ 1 - \Phi \left( \frac{4E + N_0 \ln [P(b_1)/P(b_2)]}{2\sqrt{2N_0 E}} \right) \right] + 0,5 P(b_2) \left[ 1 - \Phi \left( \frac{4E - N_0 \ln [P(b_1)/P(b_2)]}{2\sqrt{2N_0 E}} \right) \right].$$

6.3.7. Согласно решению задачи 6.3.5 вероятность ошибки в двоичной системе при точно известных сигналах и равновероятных символах определяется выражением

$$p_{\text{ош}} = 0,5 [1 - \Phi(\sqrt{0,5 E_3/N_0})]$$

и тем меньше, чем больше  $E_s$ . При произвольных сигналах  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$   $E_s = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt$ . Определим условия, при которых  $E_s$  максимальна, полагая, что

$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t) dt \leq E, \quad E_2 = \int_0^T s_2^2(t) dt \leq E.$$

Записав  $E_s = 2E_1 + 2E_2 - \int_0^T [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt$ , заметим, что для получения максимума этого выражения нужно сделать  $E_1$  и  $E_2$  возможно большими, а интеграл в правой части — как можно меньшим. Максимально возможные значения  $E_1$  и  $E_2$  будут, если  $E_1 = E_2 = E$ .

Поскольку интеграл  $\int_0^T [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt$  принимает только положительные значения, его минимум равен нулю и достигается при условии  $s_1(t) = -s_2(t)$ , т. е. при противоположных сигналах. Таким образом, в двоичном канале с постоянными параметрами и аддитивным флуктуационным шумом минимальную вероятность ошибки обеспечивает система с противоположными сигналами, так как у них эквивалентная энергия максимальна (при фиксированной энергии сигналов).

6.3.8. При приеме сигналов ОФМ по методу сравнения полярностей осуществляется когерентное (фазовое) детектирование смеси канального сигнала и шума с последующей перекодировкой символов, которая осуществляется сравнением полярностей каждого принятого символа с предыдущим. Очевидно, что вероятность  $p_{\text{ош ОФМ}}$  ошибочной регистрации символов в системе ОФМ не совпадает с вероятностью появления искаженных знаков на выходе фазового детектора или, что то же самое, с вероятностью ошибок  $p_{\text{ош ФМ}}$  в системе «классической» ФМ.

Очевидно, что ошибочная регистрация символов при приеме методом сравнения полярностей возможна в результате одного из двух несовместимых событий:

- а) знак данного элемента принят ошибочно, а знак предыдущего — верно;
- б) знак данного элемента принят верно, а предыдущего — ошибочно.

Каждое из этих событий имеет вероятность  $p_{\text{ош ФМ}}(1 - p_{\text{ош ФМ}})$ . Следовательно,  $p_{\text{ош ОФМ}} \approx 2p_{\text{ош ФМ}}(1 - p_{\text{ош ФМ}})$ . В области малых ошибок, когда  $p_{\text{ош ФМ}} \ll 1$ , получаем  $p_{\text{ош ОФМ}} \approx 2p_{\text{ош ФМ}} = 1 - \Phi(\sqrt{2}h^2)$ . При  $P_c = 0,5$  Вт,  $k = 10^{-2}$ ,  $T = 10$  мс и  $N_0 = 10^{-7}$  Вт/Гц имеем  $h^2 = 5$  и  $p_{\text{ош ОФМ}} = 1,6 \cdot 10^{-3}$ .

6.3.10. Сравнивая выражения для вероятностей ошибок, полученные в решении задачи 6.3.6, замечаем, что для сохранения вероятности ошибки неизменной при переходе от АМ к ЧМ необходимо выполнить условие  $h^2_{\text{ЧМ}} = 0,5h^2_{\text{АМ}}$  или  $U_{m \text{ ЧМ}} = U_{m \text{ АМ}}/\sqrt{2}$ .

Изменение амплитуды колебания в  $\sqrt{2}$  раз приводит к изменению пиковой мощности передатчика в 2 раза. Отсюда следует, что переход от АМ к ЧМ при неизменной вероятности ошибки дает выигрыш по пиковой мощности, равный 2. Аналогично находим, что переход от ЧМ к ФМ дает выигрыш по пиковой мощности, равный 2, а переход от АМ к ФМ — 4.

При равновероятных сигналах в системе АМ (система с пассивной паузой)  $P_c = 0,5P_{\text{макс}}$ . В системах ЧМ и ФМ (системы с активной паузой)  $P_c = P_{\text{макс}}$ . Отсюда следует, что переход от АМ к ЧМ не дает выигрыша по средней мощности, при переходе от ЧМ к ФМ выигрыш по средней мощности равен 2, при переходе от АМ к ФМ выигрыш по средней мощности также равен 2.

6.3.12. Полагая, что на вход приемника поступает процесс  $z(t) = s_i(t) + n(t)$ , для напряжения на выходе интегратора получаем

$$\Theta = (-1)^{i-1} k E \cos \varphi + k \sqrt{\frac{2E}{T}} \int_0^T n(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) dt, \quad i = 1, 2.$$

Очевидно, что  $\Theta$  является гауссовской случайной величиной с математическим ожиданием  $m_\Theta = (-1)^{i-1} k E \cos \varphi$  и дисперсией  $\sigma_\Theta^2 = k^2 N_0 E / 2$ .

Условная плотность вероятности величины  $\Theta$  при условии передачи сигнала  $s_i(t)$

$$\omega_1(\Theta | s_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{k^2 N_0 E / 2}} \times \exp \left[ -\frac{(\Theta + (-1)^{i-1} k E \cos \varphi)^2}{k N_0 E} \right], \quad i = 1, 2.$$

Используя методику решения задачи 6.3.5, после несложных преобразований получаем для вероятности ошибки

$$p_{\text{ош}}(\varphi) = 0,5 [1 - \Phi(\sqrt{2}h^2 \cos \varphi)] \quad (h^2 = E/N_0,$$

$\Phi(x)$  — функция Крампа).

Сравнивая полученное выражение с выражением, найденным в задаче 6.3.5, легко заметить, что несинфазность принимаемого сигнала и опорного колебания при ФМ ведет к энергетическому проигрышу:

$$\eta = \frac{h^2}{h^2 \cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}. \quad \text{При } \eta \leq 1,1 \quad \varphi \leq 18^\circ.$$

6.3.13. Полагая, что  $\varphi$  является случайной величиной, принимающей в моменты  $t = nT$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) значения на интервале  $(-\pi, \pi)$ , можно найти среднее значение вероятности ошибки  $p_{\text{ош}}(\varphi)$ , полученной в задаче 6.3.12, усреднив ее по всем возможным значениям  $\varphi$ :

$$\overline{p_{\text{ош}}(\varphi)} = \int_{-\pi}^{\pi} p_{\text{ош}}(\varphi) \omega_1(\varphi) d\varphi.$$

Подставляя сюда выражения для  $\rho_{\text{ош}}(\varphi)$  из предыдущей задачи и выражение  $\omega_1(\varphi)$ , находим

$$\overline{\rho_{\text{ош}}(\varphi)} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\sqrt{2h^2} \cos \varphi) \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{1}{2\pi} e^{-0,5a^2} + \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{2\pi}} F(a \cos \varphi) e^{-0,5a^2 \sin^2 \varphi} \right] d\varphi \right\}.$$

Полученный интеграл в общем виде не вычисляется в элементарных функциях. В частном случае при  $a = \sqrt{2h^2}$  имеем

$$\overline{\rho_{\text{ош}}(\varphi)} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\sqrt{2h^2} \cos \varphi) \left[ \frac{1}{2\pi} e^{-h^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sqrt{2}h \cos \varphi}{\sqrt{2\pi}} F(\sqrt{2}h \cos \varphi) e^{-h^2 \sin^2 \varphi} \right] d\varphi \right\} = \frac{1}{2} e^{-h^2}.$$

Полезно отметить, что при сделанных предположениях помехоустойчивость системы ФМ такая же, как и системы ОФМ при приеме по методу сравнения фаз (см. задачу 6.4.7).

6.3.14. Используя алгоритм работы корреляционного приемника сигналов ФМ при точно известных параметрах канала (Р.6.6) можно записать с учетом неточности синхронизации:

$$\int_{\tau}^{\tau+\tau} z(t) s_{\text{ош}}(t) dt \stackrel{1}{\cong} 0, \quad z(t) = s_i(t) + n(t).$$

Полагая, что на интервале  $(0, T)$  передается сигнал  $s_1(t)$ , а на интервале  $(T, 2T)$  — сигнал  $s_2(t)$ , записываем

$$\int_{\tau}^T [s_1(t) + n(t)] s_{\text{ош}}(t) dt + \int_T^{\tau+\tau} [s_2(t) + n(t)] s_{\text{ош}}(t) dt \stackrel{1}{\cong} 0.$$

В данном случае ошибка будет иметь место при выполнении условия

$$\int_0^T [s_1(t) + n(t)] s_{\text{ош}}(t) dt + \int_T^{\tau+\tau} [s_2(t) + n(t)] s_{\text{ош}}(t) dt < 0.$$

Подставляя сюда выражения сигналов  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  и  $s_{\text{ош}}(t)$  и осуществляя простые преобразования, получаем

$$\int_{\tau}^{\tau+\tau} n(t) \sqrt{2E/T} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) dt < -E(1 - 2\tau/T).$$

Как и в задаче 6.3.12, величина интеграла в левой части неравенства представляет собой гауссовскую случайную величину с дисперсией  $\sigma^2 = EN_0/2$ . Вероятность ошибки равна вероятности выполнения полученного неравенства и определяется выражением

$$\rho_{\text{ош}} = \int_{-\infty}^{-E(1-2\tau/T)} \omega_1(\theta) d\theta, \quad \text{где } \theta = \int_{\tau}^{\tau+\tau} n(t) \sqrt{2E/T} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) dt.$$

С учетом гауссовского распределения величины  $\Theta$  получаем

$$\rho_{\text{ош}} = 0,5 \{ 1 - \Phi[\sqrt{2E/N_0}(1 - 2\tau/T)] \} = \\ = 0,5 \{ 1 - \Phi[\sqrt{2h^2}(1 - 2\tau/T)] \}.$$

Сравнивая полученное выражение для вероятности ошибки с выражением для случая точной синхронизации ( $\tau=0$ ) (см. задачу 6.3.6), замечаем, что неточная синхронизация приводит к энергетическому проигрышу

$$\eta = h^2/[h^2(1 - 2\tau/T)]^2 = (1 - 2\tau/T)^{-2}.$$

При  $\eta \leq 1,1$   $\tau \leq 2,5 \cdot 10^{-2} T$ .

6.3.15. Легко показать, что в данном случае вероятность ошибки будет определяться соотношением

$$\rho_{\text{ош}} = 0,5 \{ 1 - \Phi[\sqrt{2h^2} \cos \varphi (1 - 2\tau/T)] \}.$$

Отсюда энергетический проигрыш  $\eta = [\cos \varphi (1 - 2\tau/T)]^{-2}$ . Задаваясь величиной  $\eta = 1,1$  (потеря мощности передатчика составляет 10%), находим, что при  $\tau=0$   $\varphi = 18^\circ$  (этот результат получен Л. М. Финком в [14]). Если положить  $\varphi=0$ , то  $\tau=0,025T$ , т. е. допустимая рассинхронизация составляет 2,5% от длительности элементарной посылки. Очевидно, что при  $\varphi \neq 0$  и  $\tau \neq 0$  допустимые погрешности будут соответственно меньше:  $18^\circ$  и  $0,025T$ . В табл. Р.6.1 приведены значения  $\varphi$  и  $\tau/T$ , при которых энергетический проигрыш  $\eta = 1,1$ .

Таблица Р 6 1

$\varphi$	$0^\circ$	$6^\circ 48'$	$10^\circ 30'$	$13^\circ 24'$	$15^\circ 30'$	$18^\circ$
$\tau/T$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	0

6.3.17. Воспользуемся алгоритмом работы когерентного приемника, найденным в задаче 6.1.7. При передаче сигнала  $s_1(t)$  ошибка произойдет в том случае, когда  $\int_0^T z(t) s_{\text{ош}}(t) dt < 0$ , где  $z(t) = s_1(t) + n(t)$ . Подставляя сюда значения  $s_1(t)$  и  $s_{\text{ош}}(t)$ , получаем после очевидных преобразований

$$\int_0^T n(t) \sqrt{2E/T} \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t + \varphi] dt < -E(T\Delta\omega)^{-1} \sin \Delta\omega T.$$

С учетом сказанного в решении задачи 6.3.12 для вероятности ошибки в данном случае можно записать

$$\rho_{\text{ош ФМ}} = 0,5 [1 - \Phi(\sqrt{2h^2}(\Delta\omega T)^{-1} \sin \Delta\omega T)].$$

Для энергетического проигрыша в этом случае имеем  $\eta = (\Delta\omega T)^2 \sin^{-2} \Delta\omega T$ . Задаваясь допустимой величиной  $\eta = 1,1$ , получаем для допустимой величины частотной расстройки  $\Delta\omega = \pm 0,54/T$ .

6.3.19. Как показано в задаче 6.3.6, при корреляционном приеме двоичной ФМ  $p_{\text{ош}} = 0,5[1 - \Phi(\sqrt{2h^2})]$ . Найдем вероятность ошибки при интегральном приеме. При передаче сигнала  $s_2(t) = \sqrt{2E/T} \cos \omega_0 t$  на выходе интегратора имеем

$$\Theta = \int_0^T \sqrt{2E/T} \cos \omega_0 t dt + \int_0^T n(t) dt.$$

Если  $\Theta > 0$ , то фиксируется символ, соответствующий сигналу  $s_1(t)$ , в противном случае фиксируется символ, соответствующий сигналу  $s_2(t)$ . Если при этом передавался сигнал  $s_1(t)$ , то произойдет ошибка. Таким образом, условием ошибки является выполнение неравенства

$$\int_0^T n(t) dt < - \int_0^T \sqrt{2E/T} \cos \omega_0 t dt$$

или

$$\int_0^T n(t) dt < - \sqrt{2E/T} \omega_0^{-1} \sin \omega_0 T.$$

Величина  $\lambda = \int_0^T n(t) dt$  является гауссовской, имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию  $\sigma^2 = 0,5N_0T$ . Поэтому

$$\begin{aligned} p_{\text{ош}} &= \int_{-\infty}^{-\sqrt{2E/T} \omega_0^{-1} \sin \omega_0 T} \omega_1(\lambda) d\lambda = \\ &= 0,5 \{1 - \Phi[\sqrt{2E/T} (0,5N_0T)^{-0,5} \omega_0^{-1} \sin \omega_0 T]\} = \\ &= 0,5 [1 - \Phi(\sqrt{2h^2} \omega_0^{-1} T^{-1} \sin \omega_0 T)]; \\ \eta &= 0,5\omega_0^2 T^2 \sin^{-2} \omega_0 T. \end{aligned}$$

6.3.20. Аналогично решению задачи 6.3.12 можем записать для условия ошибки при передаче сигнала  $s_1(t)$

$$\begin{aligned} \int_0^T z(t) s_{\text{ош}}(t) dt < 0, \quad \text{где } z(t) = \\ = \sqrt{2E/T} \exp[-\beta^2(t-0,5T)^2] \cos \omega_0 t + n(t) \end{aligned}$$

или

$$ET^{-1} \int_0^T \exp[-\beta^2(t-0,5T)^2] dt + \sqrt{2E/T} \int_0^T n(t) \cos \omega_0 t dt < 0.$$

После простых преобразований находим

$$\sqrt{2E/T} \int_0^T n(t) \cos \omega_0 t dt < -0,5E\sqrt{\pi} T^{-1} \beta^{-1} \Phi(T\beta/\sqrt{2}).$$

Учитывая, что  $\int_0^T n(t) \sqrt{2E/T} \cos \omega_0 t dt$  представляет собой гауссовскую случайную величину с дисперсией  $\sigma^2 = EN_0/2$ , находим вероятность ошибки

$$\begin{aligned} p_{\text{ош}} &= 0,5 \{1 - \Phi[0,5 \sqrt{2\pi EN_0} \Phi(T\beta/\sqrt{2})/T\beta]\} = \\ &= 0,5 \{1 - \Phi[0,5 \sqrt{2\pi h^2} \Phi(T\beta/\sqrt{2})/T\beta]\}. \end{aligned}$$

Энергетический проигрыш по сравнению со случаем отсутствия линейных искажений составляет величину  $\eta = [0,5 \sqrt{\pi} \Phi(T\beta/\sqrt{2})/T\beta]^{-2}$ . Например, при  $\beta = 0,1T^{-1}$   $\eta = 1,89$ .

6.3.21. Квадрат модуля комплексного коэффициента передачи «обеляющего» фильтра найдем как

$$K^2(\omega) = a/G_0(f) = 0,5a\alpha^{-1}[\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2], \quad a = \text{const.}$$

Спектральная плотность мощности шума на выходе «обеляющего» фильтра  $N_0 = G_0(f) K^2(\omega) = a$ .

Комплексный коэффициент передачи «обеляющего» фильтра можно записать

$$K(j\omega) = \sqrt{0,5a/\alpha} [a + j(\omega - \omega_0)].$$

Учитывая, что умножение на  $j\omega$  в частотной области эквивалентно дифференцированию во временной области, для сигналов на выходе «обеляющего» фильтра получаем

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \sqrt{0,5a/\alpha} \left[ \alpha u_1(t) + \frac{d}{dt} u_1(t) \right]; \\ s_2(t) &= -\sqrt{0,5a/\alpha} \left[ \alpha u_1(t) + \frac{d}{dt} u_1(t) \right]. \end{aligned}$$

Используя теперь формулу для вероятности ошибки при оптимальном когерентном приеме противоположных сигналов (см. задачу 6.3.7), находим вероятность ошибки при использовании метода выбеливания в заданных условиях:

$$\begin{aligned} p_{\text{ош}} &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{1}{\alpha} \int_0^T \left[ \alpha u_1(t) + \frac{d}{dt} u_1(t) \right]^2 dt} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{U_m^2 T}{2} \left( \alpha + \frac{\omega_0^2}{\alpha} \right)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Найдем теперь спектральную плотность мощности белого шума, имеющего в полосе  $f_0 \pm F$  такую же среднюю мощность, что и заданный небелый шум:

$$N_0 = \frac{1}{2F} \int_{f_0-F}^{f_0+F} G(f) df = \frac{\alpha}{F} \int_{f_0-F}^{f_0+F} \frac{df}{4\pi^2(f-f_0)^2 + \alpha^2} = \frac{1}{2\pi F} \arctg \frac{2\pi F}{\alpha}.$$

Вероятность ошибки при оптимальном когерентном приеме

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{U_m^2 T}{2} \frac{4\pi F}{\arctg \frac{2\pi F}{\alpha}}} \right) \right].$$

Энергетический проигрыш, связанный с наличием небелого шума,

$$\eta = \frac{\alpha + \omega_0^2/\alpha}{4\pi F} \arctg \frac{2\pi F}{\alpha} = \left( \frac{\alpha}{4\pi F} + \frac{\pi f_0^2}{\alpha F} \right) \arctg \frac{2\pi F}{\alpha}.$$

#### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 6.4.

6.4.1. Подставив (6.25) в выражение функции правдоподобия, найденное в задаче 3.1.16, после простых преобразований получим для известных  $k$  и  $\Theta$

$$\omega_1(z|b_i)_{k, \theta} = K_1 \exp \left[ \frac{2k}{N_0} (Y_i \cos \theta - \tilde{Y}_i \sin \theta) - \frac{k^2 E_i}{N_0} \right]$$

или, обозначив  $V_i = \sqrt{Y_i^2 + \tilde{Y}_i^2}$  и  $\varphi_i = \arctg \frac{\tilde{Y}_i}{Y_i}$ ,

$$\omega_1(z|b_i)_{k, \theta} = K_1 \exp \left[ \frac{2k}{N_0} V_i \cos(\theta - \varphi_i) - \frac{k^2 E_i}{N_0} \right].$$

Здесь  $Y_i = \int_0^T z(t) s_i(t) dt$ ;  $\tilde{Y}_i = \int_0^T z(t) \tilde{s}_i(t) dt$ ;  $K_1$  — нормирующий коэффициент, не зависящий от  $i$ . Усреднив  $\omega(z|b_i)_{k, \theta}$  по всем значениям  $\Theta$ , при равномерном распределении фазы на интервале  $(-\pi, \pi)$  получим

$$\omega(z|b_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega(z|b_i)_{k, \theta} d\theta = K_1 \exp \left( -\frac{k^2 E_i}{N_0} \right) I_0 \left( \frac{2kV_i}{N_0} \right).$$

Здесь  $I_0(x)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

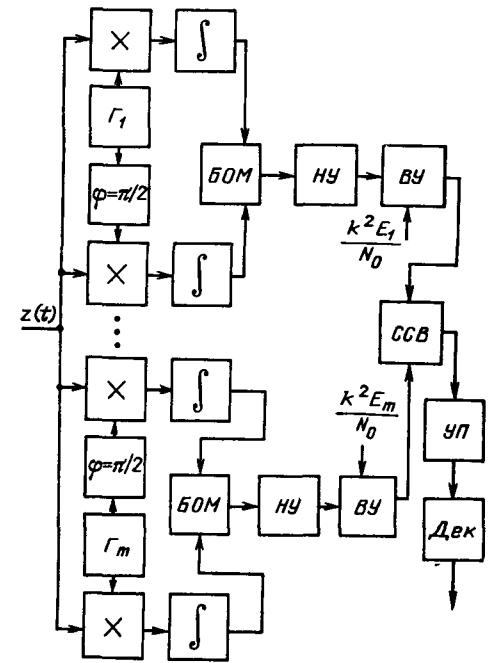
В соответствии с правилом максимального правдоподобия (6.4) находим алгоритм оптимального приема при неопределенной фазе:

$$\max_i \left[ \ln I_0 \left( \frac{2V_i}{N_0} \right) - \frac{k^2 E_i}{N_0} \right]. \quad (\text{Р.6.11})$$

Величины  $Y_i$  и  $\tilde{Y}_i$  можно получить на выходе корреляторов с опорными сигналами  $s_i(t)$  и  $\tilde{s}_i(t)$  соответственно.

Структурная схема оптимального при неопределенной фазе приемника на базе корреляционной техники показана на рис. Р.6.14. На этой схеме  $\Gamma_i$  — генераторы опорных сигналов  $s_i(t)$  с точностью до фазы;  $\varphi = \pi/2$  — фазовращатели на  $\pi/2$  (генераторы сопряженных сигналов); БОМ — блок определения модуля вектора  $V_i = \sqrt{Y_i^2 + \tilde{Y}_i^2}$  по ортогональным компонентам; НУ — нелинейные устройства с характеристикой  $u_{\text{вых}} = \ln I_0[(2k/N_0)u_{\text{вх}}]$ .

Рис. Р.6.14. Структурная схема оптимального приемника при неопределенной фазе сигнала (квадратурная схема)



Как показано в решении задачи 6.2.12, величины  $V_i$  не зависят от начальной фазы сигналов  $s_i(t)$  и определяются огибающей (в момент окончания сигнала  $T$ ) на выходе фильтра, согласованного с сигналом  $s_i(t)$ . Поэтому алгоритм (Р.6.11) можно реализовать и на базе согласованных фильтров в соответствии со схемой рис. Р.6.15. Здесь СФ — фильтр, согласованный с сигналом  $s_i(t)$ ; Д — детектор огибающей.

6.4.2. Указание к решению. Учтите монотонный характер зависимости функции  $\ln I_0(x)$  от аргумента  $x$ .

6.4.3. Как показано в решении задачи 6.2.12,

$$V_i = \sqrt{\left( \int_0^T z(t) s_i(t) dt \right)^2 + \left( \int_0^T z(t) \tilde{s}_i(t) dt \right)^2}.$$

Если шум в канале отсутствует и передается символ  $b_i$ , то  $z(t) = k \cos \Theta s_i(t) - k \sin \Theta \tilde{s}_i(t)$  и  $V_i = k \sqrt{E}$ .

В этом случае

$$V_j = \sqrt{\left( \int_0^T k \cos \theta s_i(t) s_j(t) dt - \int_0^T k \sin \theta s_i(t) \tilde{s}_j(t) dt \right)^2 + \left( \int_0^T k \cos \theta s_i(t) \tilde{s}_j(t) dt - \int_0^T k \sin \theta \tilde{s}_i(t) s_j(t) dt \right)^2}.$$

Согласно (6.25) наиболее помехоустойчивой является та система, для которой при передаче символа  $b_i$  значение  $V_i$  оказывается наибольшим, а значения  $V_{j \neq i}$  — наименьшими. Так как  $V_j \geq 0$ , то минимально возможное значение  $V_j$  равно нулю. Нетрудно заметить, что  $V_j$  будет равно нулю лишь при выполнении условий  $\int_0^T s_i(t) s_j(t) dt = 0$  при  $i \neq j$ ,  $\int_0^T s_i(t) \tilde{s}_j(t) dt = 0$  при любых  $i, j$ . Но это есть не что иное, как условия ортогональности в усиленном смысле (см. § 2.5). Следовательно, в каналах с неопределенной фазой

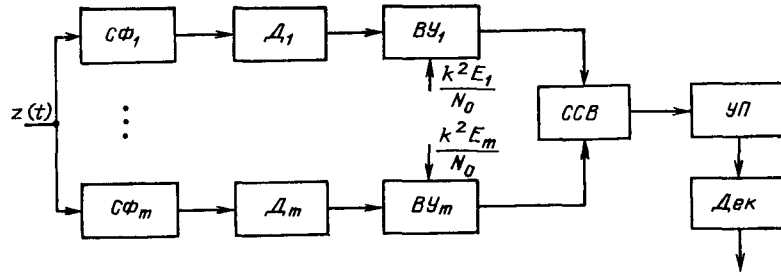


Рис. Р.6.15. Реализация оптимального приемника при неопределенной фазе сигнала на основе согласованных фильтров

максимальную помехоустойчивость будет иметь система с активной паузой и ортогональными в усиленном смысле сигналами.

Определим вероятность ошибки при приеме по алгоритму  $V_i \underset{b_j}{\cong} V_j$ . При передаче символа  $b_i$

$$V_i = \sqrt{(\Lambda_i + XE)^2 + (\tilde{\Lambda}_i + YE)^2}; \quad X = k \cos \theta, \quad Y = k \sin \theta;$$

$$V_j = \sqrt{\Lambda_j^2 + \tilde{\Lambda}_j^2}; \quad \Lambda_i = \int_0^T N(t) s_i(t) dt; \quad \tilde{\Lambda}_i = \int_0^T N(t) \tilde{s}_i(t) dt.$$

Величины  $\Lambda_i, \tilde{\Lambda}_i$  имеют гауссовское распределение и нулевые математические ожидания. При ортогональных сигналах величины  $\Delta_i, \tilde{\Delta}_j$  с различными индексами независимы [8], независимы и величины  $\Lambda_i, \tilde{\Lambda}_i$  вследствие взаимной ортогональности. Следовательно, независимы и величины  $V_i$  и  $V_{j \neq i}$ . Дисперсия величин  $\Lambda_i, \tilde{\Lambda}_i$  равны  $N_0 E/2$ . Для плотностей вероятности величины  $V_i$  и  $V_j$  имеем

$$\omega_1(V_j) = \frac{2V_j}{N_0 E} \exp\left(-\frac{V_j^2}{N_0 E}\right);$$

$$\omega_1(V_i) = \frac{2V_i}{N_0 E} \exp\left(-\frac{V_i^2 + k^2 E^2}{EN_0}\right) I_0\left(\frac{2kV_i}{N_0}\right).$$

Вероятность ошибки для двоичной системы, одинаковая при передаче любой позиции вследствие симметрии канала, определяется вероятностью невыполнения неравенства  $V_i > V_j$ :

$$\rho = \int_0^\infty \omega_1(V_i) \int_{V_i}^\infty \omega(V_j) dV_j dV_i.$$

Интегрируя по  $V_i$ , получаем

$$\rho_{\text{ош}} = \int_0^\infty \frac{2V_i}{N_0 E} \exp\left(-\frac{2k^2 E}{N_0} - \frac{2V_i}{N_0 E}\right) I_0\left(\frac{2kV_i}{N_0}\right) dV_i.$$

Этот интеграл табличный [4] и равен

$$\rho_{\text{ош}} = 0,5 \exp(-h^2/2); \quad h^2 = k^2 E/N_0 = k^2 P_c/P_{\text{ш}}.$$

Подставляя сюда числовые данные, получаем  $h^2 = 10$ ,  $\rho_{\text{ош}} = 0,5 \exp(-5) = 3,37 \cdot 10^{-3}$ .

В канале с точно известными параметрами такая же вероятность ошибки будет обеспечена при  $h^2 = 7,6$ . Следовательно, незнание фазы сигнала приводит к энергетическому проигрышу  $\eta = 1,31$ .

6.4.6. Согласно результату задачи 6.4.2 алгоритм работы оптимального приемника  $m$ -позиционной системы с активной паузой, ортогональной в усиленном смысле, при неопределенной фазе мож-

но записать в виде  $V_i \underset{b_j}{\cong} V_j$ .

При передаче символа  $b_i$  условием правильного приема является выполнение системы  $m-1$  неравенств  $V_i > V_j$  при всех  $j \neq i$ . Вероятность выполнения этих неравенств равна вероятности правильного приема:

$$\rho_{\text{пр}, m} = \int_0^\infty \omega_1(V_i) \left[ \int_0^{V_i} \omega_1(V_j) dV_j \right]^{m-1} dV_i.$$

Вероятность ошибки, характеризующая помехоустойчивость системы при неопределенной фазе сигнала,

$$\rho_{\text{ош}, m} = 1 - \rho_{\text{пр}, m} = 1 - \int_0^\infty \omega_1(V_i) \left[ \int_0^{V_i} \omega_1(V_j) dV_j \right]^{m-1} dV_i.$$

Подставив сюда плотности вероятности величин  $V_i$  и  $V_j$  из задачи 6.4.3 и разложив после интегрирования по  $V_j$  величину  $\{1 - \exp[-V_j^2/(EN_0)]\}^{m-1}$  по формуле бинома Ньютона, получим

$$\rho_{\text{ош}, m} = 1 - \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n C_{m-1}^n \frac{1}{n+1} \exp\left(-\frac{n}{n+1} h^2\right), \quad h^2 = E/N_0.$$

Отсюда при  $m=2$  следует результат, полученный в задаче 6.4.3 для двухпозиционной системы.

При больших отношениях сигнал-шум, заменяя обобщенное распределение Рэля гауссовским распределением с соответствующими параметрами (см. решение задачи 6.4.3), получаем

$$\rho_{\text{ош}, m} \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left[-\frac{(V_i - kE)^2}{N_0 E}\right] \times$$

$$\times \left[ 1 - \exp\left(-\frac{V_i^2}{N_0 E}\right) \right]^{m-1} dV_i.$$

Используя для  $\{1 - \exp[-V_i^2/(N_0 E)]\}^{m-1}$  формулу бинома Ньютона и ограничиваясь первым членом, находим, что в области малых ошибок

$$\rho_{\text{ош}} = 0,5(m-1) \exp(-h^2/2) = (m-1) \rho_{\text{ош}},$$

где  $\rho_{\text{ош}}$  — вероятность ошибки в двухпозиционной системе.

6.4.7. При ОФМ информационный параметр сигнала определяется двумя соседними посылками:  $(n-1)$ -й на интервале  $(0, T)$  и  $n$ -й на интервале  $(T, 2T)$ . Поэтому оптимальный алгоритм, найденный в задаче 6.4.2, можно в данном случае записать

$$\max_i \left\{ \sqrt{\left[ \int_0^{2T} z(t) s_i(t) dt \right]^2 + \left[ \int_0^{2T} z(t) \tilde{s}_i(t) dt \right]^2} \right\}, \quad i = \overline{1, 2},$$

$$z(t) = \begin{cases} z_{n-1}(t) & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ z_n(t) & \text{при } T \leq t \leq 2T. \end{cases}$$

Если сигнал  $(n-1)$ -й посылки имеет вид  $kU_m \cos(\omega_0 t + \Theta)$ , где  $\Theta$  — случайная начальная фаза, неизвестная на приеме, то систему сигналов при ОФМ можно записать так:  $s_1(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \Theta)$  при передаче 1  $(n-1)$ -й посылкой  $(0 \leq t \leq T)$ ,

$$s_2(t) = \begin{cases} kU_m \cos(\omega_0 t + \Theta) & \text{при передаче 0 } n\text{-й посылкой} \\ & (T \leq t \leq 2T) \\ -kU_m \cos(\omega_0 t + \Theta) & \text{при передаче 1 } n\text{-й посылкой} \\ & (T \leq t \leq 2T). \end{cases}$$

Эти сигналы являются ортогональными в усиленном смысле. Поэтому с учетом выражения для  $\rho_{\text{ош}}$  из задачи 6.4.6 получаем  $\rho_{\text{ош ОФМ}} = 0,5 \exp(-h^2)$ , где учтено, что для реализаций сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  отношение энергии сигнала к спектральной плотности шума на интервале  $2T$  равно удвоенному значению этого же отношения при длительности элемента сигнала  $T$ .

Полезно заметить, что полученное выражение совпадает с выражением для средней вероятности ошибки в системе ФМ при учете фазовой нестабильности (см. задачу 6.3.13).

Согласно числовым данным  $h^2 = 4$ ,  $\rho_{\text{ош ОФМ}} = 0,5e^{-4} = 9,15 \times 10^{-3}$ . Для обеспечения такой же вероятности ошибки при приеме сигнала ОФМ в канале с точно известными параметрами (см. задачу 6.3.10) необходимо иметь  $h^2 = 3,5$ . Таким образом, переход от когерентного приема двоичной ОФМ к некогерентному сопрягается энергетическим проигрышем  $\eta = 1,14$ .

6.4.9. Функцию правдоподобия  $\omega_1(z|b_i)$  запишем в виде

$$\omega_1(z|b_i) = K_1 \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \left[ x Y_i - y \tilde{Y}_i - \frac{E_i}{2} (x^2 + y^2) \right] \right\},$$

где  $Y_i = \int_0^T z(t) s_i(t) dt$ ;  $\tilde{Y}_i = \int_0^T z(t) \tilde{s}_i(t) dt$ ;  $x = k \cos \Theta$ ,  $y = k \sin \Theta$ .

Будем искать максимум функции

$$\ln \omega_1(z|b_i) = \frac{2}{N_0} \left[ x Y_i - y \tilde{Y}_i - \frac{E_i}{2} (x^2 + y^2) \right] + \ln K_1.$$

Согласно обобщенному правилу максимального правдоподобия следует регистрировать символ  $b_i$ , если для всех  $j \neq i$  выполняются неравенства

$$\max \ln \omega_1(z|b_i) > \max \ln \omega_1(z|b_j),$$

где максимум ищется по параметрам  $x$  и  $y$ . Параметры, обращающие  $\ln \omega_1(z|b_i)$  в максимум, определяются из условий:

$$\frac{\partial \ln \omega_1(z|b_i)}{\partial x} = \frac{2}{N_0} (Y_i - x E_i) = 0 \quad \text{или} \quad x = Y_i / E_i;$$

$$\frac{\partial \ln \omega_1(z|b_i)}{\partial y} = \frac{2}{N_0} (-\tilde{Y}_i - y E_i) = 0 \quad \text{или} \quad y = -\tilde{Y}_i / E_i.$$

Найденные значения  $x$  и  $y$  называют максимально правдоподобными оценками этих величин. Учитывая их, получаем

$$\ln \omega_1(z|b_i) = \frac{Y_i^2 + \tilde{Y}_i^2}{E_i N_0} + \ln K_1 = \frac{V_i^2}{E_i N_0} + \ln K_1.$$

Отсюда оптимальный алгоритм принимает вид  $\max_i (V_i^2 / E_i)$ . Для систем с активной паузой ( $E_i = E$ ) найденный алгоритм сводится к алгоритму (6.27).

6.4.10. В соответствии с решением задачи 6.4.3 вероятность ошибки при оптимальном приеме сигналов с двоичной ЧМ в канале с неопределенной фазой

$$\rho_{\text{ош}} = 0,5 \exp(-k^2 E / N_0).$$

Для определения вероятности ошибки в случае замираний амплитуды сигнала необходимо данное выражение усреднить по всем значениям  $k$ :

$$\rho_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp(-k^2 E / N_0) \omega_1(k) dk.$$

Подставляя для  $\omega_1(k)$  обобщенное распределение Рэлея, получаем [8]

$$\rho_{\text{ош}} = \frac{\exp\{-q^2 h^2 / [2(1+q^2) + h^2]\}}{2 + h^2 / (1+q^2)}, \quad q^2 = \alpha_p^2 / \sigma^2.$$

Положив  $q^2 = 5$ , получим

$$\rho_{\text{ош}} = \frac{\exp(-5 h^2 / (12 + h^2))}{2 + h^2 / 6}.$$

При  $\rho_{\text{ош}} = 10^{-4}$  энергетический проигрыш равен 10 (10 дБ).

6.4.13. Если эффективная полоса пропускания разделительного фильтра  $F_3 = n/T$ ,  $n > 1$ , а разнос между частотами нажатия и отжатия имеет порядок величины  $F_3$ , то при передаче частоты нажатия амплитуда сигнала на выходе ПФ<sub>0</sub> определяется только помехой в канале и имеет распределение Рэлея:

$$\omega_1(r_0) = \frac{r_0}{N_0 F_3} \exp\left(-\frac{r_0^2}{2 N_0 F_3}\right),$$

где  $N_0 F_3$  — дисперсия помехи на выходе фильтра.

Амплитуда же сигнала на выходе ПФ<sub>н</sub> обусловлена сигналом и помехой и распределена по обобщенному закону Рэлея:

$$\omega_1(r_{\text{н}}) = \frac{r_{\text{н}}}{N_0 F_{\text{в}}} \exp\left(-\frac{r_{\text{н}}^2 + U_m^2}{2N_0 F_{\text{в}}}\right) I_0\left(\frac{r_{\text{н}} U_m}{N_0 F_{\text{в}}}\right),$$

где  $U_m$  — амплитуда сигнала на входе приемника. В этих условиях при симметрии канала

$$\rho_{\text{ош}} = \int_0^{\infty} \omega_1(r_{\text{н}}) \int_{r_{\text{н}}}^{\infty} \omega(r_0) dr_0 dr_{\text{н}}.$$

Интегрируя, получаем  $\rho_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{V_m^2}{2 \cdot 2N_0 F_{\text{в}}}\right)$ .

Обозначив  $h^2 = U_m^2 T / 2N_0$  и учтя, что  $F_{\text{в}} = n/T$ , получим  $\rho_{\text{ош}} = 0,5 \exp(-h^2/2n)$ .

Эта величина больше вероятности ошибки при оптимальном некогерентном приеме в

$$\frac{\rho_{\text{ош}}}{\rho_{\text{ош.опт}}} = \frac{\exp(-h^2/2n)}{\exp(-h^2/2)} = \exp\left[\frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] \text{ раз.}$$

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГЛАВЫ 7

### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 7.1.

7.1.1. При гауссовском белом шуме функционал отношения правдоподобия определяется соотношением

$$l(z|k) = \exp\left[\frac{2k}{N_0} \int_0^T z(t) u(t, \Theta) dt - \frac{k^2 E}{N_0}\right],$$

где  $E = \int_0^T u^2(t, \Theta) dt$  — энергия сигнала. Уравнение правдоподобия (7.5) в этом случае выглядит так:

$$\frac{\partial [\ln l(z|k)]}{\partial k} = \frac{2}{N_0} \int_0^T z(t) u(t, \Theta) dt - \frac{2kE}{N_0} = 0.$$

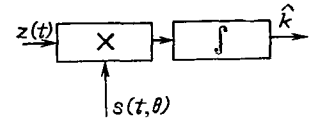
Решением уравнения будет величина

$$\hat{k} = \frac{1}{E} \int_0^T z(t) u(t, \Theta) dt,$$

которая и представляет собой максимально правдоподобную оценку коэффициента передачи канала при точно известном сигнале.

Оптимальный измеритель реализуется согласованным фильтром или коррелятором (рис. Р.7.1).

Рис. Р.7.1. Структурная схема оптимального измерителя коэффициента передачи канала при точно известном сигнале



Так как  $z(t) = ku(t, \Theta) + n(t)$ , имеем

$$\hat{k} = k + \frac{1}{E} \int_0^T n(t) u(t, \Theta) dt.$$

Следовательно, ошибка измерения

$$\varepsilon = \hat{k} - k = \frac{1}{E} \int_0^T n(t) u(t, \Theta) dt.$$

При гауссовском шуме с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью мощности  $N_0$  ошибка распределена нормально, имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию  $D[E] = N_0/2E$ .

Следовательно, полученная оценка является несмещенной ( $M[E] = 0$ ), состоятельной ( $D[E] = N_0/2E \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow \infty, E \rightarrow \infty$ ). Поскольку при  $T \rightarrow \infty$   $D[E] \rightarrow 0$  оценка коэффициента передачи канала является асимптотически эффективной, так как значение дисперсии ошибки, равное нулю, является минимально возможным.

7.1.2. Используя (3.13), можно записать

$$\omega(z|k) = \omega(n) = K_1 \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - ku(t)]^2 dt\right\}.$$

Учитывая, что анализ осуществляется в дискретные моменты  $t_i$ , находим

$$\ln \omega(z|k) = -\frac{1}{2N_0 F} \sum_{i=1}^m z^2(t_i) + \frac{1}{N_0 F} \sum_{i=1}^m z(t_i) ku(t_i) - \frac{1}{2N_0 F} \sum_{i=1}^m k^2 u^2(t_i).$$

Составим уравнение правдоподобия:

$$\frac{\partial \ln \omega(z|k)}{\partial k} = \frac{1}{N_0 F} \sum_{i=1}^m z(t_i) u(t_i) - \frac{k}{N_0 F} \sum_{i=1}^m u^2(t_i) = 0.$$

Отсюда

$$\hat{k} = \frac{\sum_{i=1}^m z(t_i) u(t_i)}{\sum_{i=1}^m u^2(t_i)}.$$

7.1.3. Указание к решению. Принять интервал между отсчетами  $\Delta t = 0,5/F$  и воспользоваться результатом задачи 7.1.2.

7.1.6. При неопределенной фазе сигнала функционал отношения правдоподобия

$$l(z|k) = \exp(-k^2 E/N_0) I_0(2kV/N_0),$$



где

$$V = \sqrt{\left[ \int_0^T z(t) u(t) dt \right]^2 + \left[ \int_0^T z(t) \tilde{u}(t) dt \right]^2}.$$

Составим уравнение правдоподобия по (7.4):

$$\frac{\partial l(z|k)}{\partial k} = \left[ -\frac{2kE}{N_0} I_0\left(\frac{2kV}{N_0}\right) + \frac{2V}{N_0} I_1\left(\frac{2kV}{N_0}\right) \right] \exp\left(-\frac{k^2 E}{N_0}\right) = 0.$$

так как  $\partial I_0(x)/\partial x = I_1(x)$ .

Отсюда  $\hat{k} = VI_1(2kV/N_0)/EI_0(2kV/N_0)$ .

Структурная схема измерителя (рис. Р.7.2) содержит согласованный фильтр, детектор огибающей, блоки, выполняющие операции умножения и деления, нелинейные операции  $y_1 = I_1(x)$ ,  $y_2 = I_0(x)$ , вычитания. Оптимальная оценка амплитуды соответствует тому значению множителя  $\hat{k}$ , при котором на выходе вычитающего устройства достигается нулевое значение напряжения.

7.1.7. Указание к решению. Представить огибающую

$$V = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^m z(t_i) u(t_i) \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^m z(t_i) \tilde{u}(t_i) \right]^2}.$$

7.1.8. Указание к решению. Использовать оценку  $\hat{k}$ , полученную в решении задачи 7.1.6. Учесть, что при больших значениях отношения сигнал-шум  $I_1(x) \approx I_0(x)$ ,  $2kV/N_0 \gg 1$ , а обобщенное распределение Рэлея удовлетворительно аппроксимируется гауссовским законом [10]:

$$\omega(V) = \frac{1}{\sqrt{\pi EN_0}} \exp[-(V - kE)^2/EN_0].$$

7.1.9. При неопределенной фазе сигнала функционал отношения правдоподобия можно записать в виде

$$l(z|\varphi) = \exp\left\{ \frac{2k}{N_0} \left[ \cos \varphi \int_0^T z(t) u(t) dt - \sin \varphi \int_0^T z(t) \tilde{u}(t) dt \right] - \frac{k^2 E}{N_0} \right\}.$$

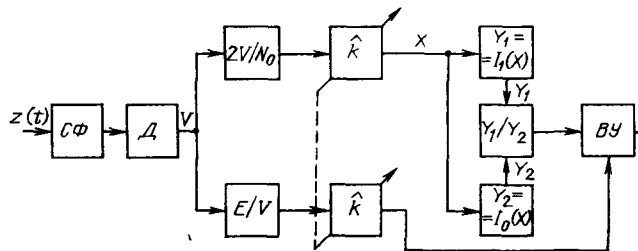


Рис. Р.7.2 Структурная схема оптимального измерителя коэффициента передачи канала при неопределенной фазе сигнала

поскольку принимаемый сигнал  $s(t) = k \cos \varphi u(t) - k \sin \varphi \tilde{u}(t)$ . Составим уравнение правдоподобия

$$\partial [\ln l(z|\varphi)] / \partial \varphi = 0.$$

После дифференцирования получаем

$$-\frac{2k}{N_0} \sin \hat{\varphi} \int_0^T z(t) u(t) dt = \frac{2k}{N_0} \cos \hat{\varphi} \int_0^T z(t) \tilde{u}(t) dt$$

или

$$\operatorname{tg} \hat{\varphi} = -y_1/y_2.$$

где

$$y_1 = \int_0^T z(t) \tilde{u}(t) dt, \quad y_2 = \int_0^T z(t) u(t) dt.$$

Видно, что

$$y_1 = -kE \sin \varphi + \tilde{\Lambda}_1, \quad y_2 = kE \cos \varphi + \Lambda_1,$$

где  $\varphi$  — истинное значение фазы;

$$\Lambda_1 = \int_0^T u(t) n(t) dt, \quad \tilde{\Lambda}_1 = \int_0^T \tilde{u}(t) n(t) dt,$$

$$\operatorname{tg} \hat{\varphi} = \operatorname{tg} \varphi (1 - \tilde{\Lambda}_1/kE \sin \varphi) / (1 - \Lambda_1/kE \cos \varphi).$$

В области больших значений отношения сигнал-шум, исключая пока из рассмотрения значения  $\varphi = k\pi/2$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ), можно написать

$$\operatorname{tg} \hat{\varphi} = \operatorname{tg} \varphi (1 - \tilde{\Lambda}_1/kE \sin \varphi) / (1 - \Lambda_1/kE \cos \varphi) = \operatorname{tg} \varphi - \varepsilon^2 / \cos^2 \varphi,$$

где  $\varepsilon = 1/kE (\tilde{\Lambda}_1 \cos \varphi + \Lambda_1 \sin \varphi)$ . Величину  $\operatorname{tg} \varphi - \varepsilon^2 / \cos^2 \varphi$  можно считать первыми двумя членами разложения в ряд Тейлора функции  $\operatorname{tg}(\hat{\varphi} = \varphi - \varepsilon)$  по малым приращениям  $\varepsilon$ . Таким образом, в области больших значений отношения сигнал-шум  $\hat{\varphi} \approx \varphi - \varepsilon^*$ . Случайная величина  $\varepsilon$  имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\overline{\varepsilon^2} = N_0/2k^2E$ . Это означает, что полученная оценка несмещенная, состоятельна и асимптотически эффективна.

7.1.11. При равномерном распределении оцениваемого параметра алгоритм оценки, максимизирующий апостериорную вероятность, не отличается от алгоритма, полученного по критерию максимального правдоподобия. Функционал отношения правдоподобия

$$l[z(t)|\varphi, \tau] = \exp \left[ \frac{2k}{N_0} \int_{\tau}^{\tau+\tau_n} z(t) a(t-\tau) \cos(\omega t + \varphi) dt - \frac{k^2 E}{N_0} \right].$$

\* Этот результат справедлив и для углов  $\varphi = k\pi/2$ .

Усредняя по фазе  $\varphi$ , которая считается распределенной равномерно, получаем для функционала отношения правдоподобия

$$l[z(t)|\tau] = KI_0[2V(\tau)/N_0],$$

где  $K = \exp(-k^2 E/N_0)$ ,

$$V(\tau) = k \sqrt{\left[ \int_{\tau}^{\tau+\tau_n} z(t) a(t-\tau) \cos \omega t dt \right]^2 + \left[ \int_{\tau}^{\tau+\tau_n} z(t) a(t-\tau) \sin \omega t dt \right]^2}.$$

Величина  $V(\tau)$  пропорциональна значению огибающей напряжения на выходе фильтра, согласованного с сигналом в момент  $t = \tau + \tau_n$ , т. е. в момент окончания импульса сигнала на выходе фильтра. Но к моменту окончания сигнала на выходе оптимального фильтра напряжение на его выходе (при времени задержки  $t_0 = \tau_n$ ) достигает максимума. Поскольку  $I_0(x)$  — монотонная функция от  $x$ , то при изменениях  $\tau$  максимум  $l[z(t)|\tau]$  совпадает с максимумом  $V(\tau)$ . Следовательно, оптимальная оценка времени прихода  $\tau$  определяется моментом, при котором на выходе детектора, подключенного к согласованному фильтру (рис. P.7.3,а), напряжение достигает максимума (рис. P.7.3,б). Если этот максимум достигается в момент  $t_{\text{макс}}$ , то  $\hat{\tau} = t_{\text{макс}} - \tau_n$ . Апостериорная вероятность параметра  $\tau$  при неопределенной фазе

$$p(\tau|z) = K_1 I_0[2V(\tau)/N_0]$$

( $K_1$  определяется из условия нормировки).

При больших значениях отношения сигнал-шум  $V(\tau)$  велико, и можно воспользоваться асимптотикой для  $I_0(x) = \exp(x)/\sqrt{2\pi x}$  [4]. Поскольку при изменениях  $\tau$  показатель экспоненты  $\exp[2V(\tau)/N_0]$  меняется несравненно быстрее, чем выражение, стоящее в знаменателе, то можно написать

$$p(\tau|z) = K_2 \exp[2V(\tau)/N_0]$$

( $K_2$  определяется из условия нормировки). Функция  $V(\tau)$  является огибающей по  $\varphi$  функции

$$\xi(\tau, \varphi) = \int_{\tau}^{\tau+\tau_n} z(t) a(t-\tau) \cos(\omega t + \varphi) dt,$$

где  $z(t) = a(t-\tau_0) \cos(\omega t + \varphi_0) h(t-\tau) + n(t)$  ( $\tau_0, \varphi_0$  — истинные значения параметров  $\tau$  и  $\varphi$  сигнала на входе измерителя). В области

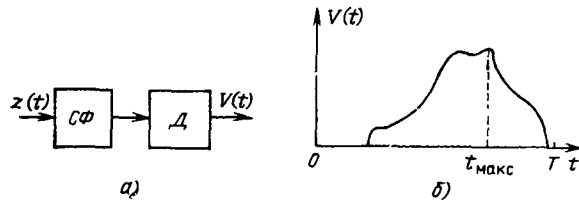


Рис P.7.3 Оптимальный измеритель времени прихода сигнала с неопределенной фазой (а) и отклик (б)

больших значений отношения сигнал-шум можно при определении функции  $\xi(\tau, \varphi)$  пренебречь шумовым слагаемым в  $z(t)$ :

$$\xi(\tau, \varphi) = \int_{\tau}^{\tau+\tau_n} a(t-\tau_0) a(t-\tau) \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(\omega t + \varphi) h(t-\tau) dt.$$

На практике обычно выполняется условие  $\omega\tau_n \gg 1$ . Но тогда можно в  $\xi(\tau, \varphi)$  положить  $\varphi_0 = 0$  и привести эту функцию к виду

$$\xi(\tau, \varphi) = \left[ 0,5 \int_{\tau}^{\tau+\tau_n} a(t-\tau_0) a(t-\tau) dt \right] \cos \varphi.$$

Следовательно, огибающая по  $\varphi$

$$V(\tau) = 0,5 \int_{\tau}^{\tau+\tau_n} a(t-\tau_0) a(t-\tau) dt.$$

При большом значении отношения сигнал-шум погрешность измерения  $\tau$  мала,  $p(\tau|z)$  имеет существенное значение лишь в области, где  $\tau$  близко к  $\tau_0$ , т. е. при малых значениях разности  $\Delta\tau = \tau - \tau_0$ . Поэтому можно воспользоваться тремя первыми членами разложения в ряд Тейлора:  $a(t-\tau) = a(t-\tau_0) + a'(t-\tau_0)\Delta\tau + 0,5a''(t-\tau_0)\Delta\tau^2$ . Подставив  $a(t-\tau)$  под знак интеграла и выполнив интегрирование по частям, получим [3]

$$V(\tau) = E - 0,25 (\Delta\tau)^2 \int_{\tau}^{\tau+\tau_n} [a'(t-\tau)]^2 dt,$$

$$p(\tau|z) = K_2 \exp[-0,5 (\tau - \tau_0)^2 / \beta^2], \quad \beta^2 = N_0 \int_{\tau}^{\tau+\tau_n} [\partial a(t-\tau) / \partial \tau]^2 dt.$$

Условие нормировки дает  $K_2 = 1/\sqrt{2\pi\beta^2}$ . Более правильный результат для апостериорной вероятности

$$p(\tau|z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2}} \exp[-0,5 (\tau - \tau_n)^2 / \beta^2],$$

где  $\tau_n$  — наиболее вероятное значение  $\tau$ , соответствующее максимуму кривой  $p(\tau|z)$ . Его можно получить, если не пренебречь шумовой компонентой  $n(t)$  в  $z(t)$  при вычислении  $\xi(\tau, \varphi)$ , как это сделано выше.

Из полученного результата следует, что при больших значениях отношения сигнал-шум оценка времени прихода  $\tau$  несмещенная ( $M[\tau] = \tau_n$ ), а дисперсия ошибки

$$D[\tau] = \beta^2 = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 df,$$

где  $|S(j\omega)|$  — модуль комплексного спектра огибающей. Энергия

сигнала  $E = 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} a^2(t) dt = 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 df$ , поэтому

$$D[\tau] = N_0 / 2E \nu^2, \quad \nu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 df / \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 df.$$

Очевидно,  $\lim_{T \rightarrow \infty (E \rightarrow \infty)} D[\tau] = 0$  и, следовательно, полученная оценка является состоятельной и асимптотически эффективной.

7.1.12. Апостериорная вероятность частоты сигнала определяется формулой  $P(f|z) = K_1 I_0[2V(f)/N_0]$ , а

$$V(f) = k \sqrt{\left[ \int_0^T z(t) \cos \omega t dt \right]^2 + \left[ \int_0^T z(t) \sin \omega t dt \right]^2}$$

это огибающая по  $f$  колебания

$$\xi(f, \varphi) = \int_0^T z(t) k \cos(\omega t + \varphi) dt.$$

Величина  $V(f)$  для каждого значения частоты  $f$  пропорциональна значению огибающей (в момент  $t=T$ ) колебания на выходе фильтра, согласованного с прямоугольным радиоимпульсом  $s(t) = k \cos(\omega t + \varphi)$  с точностью до фазы  $\varphi$ . Так как структура согласованного фильтра зависит от частоты  $f = 0,5\omega/\pi$  сигнала, то, строго говоря, для оптимальной оценки частоты (т. е. выбора величины  $f$ , которая соответствует максимуму  $V(f)$ ) следовало бы располагать бесконечным набором таких фильтров для области частот от  $f_{\min}$  до  $f_{\max}$  \*.

На практике вместо бесконечного набора фильтров можно использовать  $n = (f_{\max} - f_{\min})/\Delta f$  фильтров, где  $\Delta f$  — величина, меньшая ширины основной части спектра сигнала. По точкам функции  $P(f_k|z)$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) можно более или менее точно построить непрерывную (по  $f$ ) кривую  $P(f|z)$ . Структурная схема  $n$ -канального измерителя частоты показана на рис. Р.7.4.

В области больших значений отношения сигнал-шум апостериорную вероятность можно определить так:  $P(f|z) = K_2 \exp[-2V(f)/N_0]$ . При большом значении отношения сигнал-шум можно при нахождении  $V(f)$  также считать  $z(t) = k \cos \omega_0 t$ ,  $\omega_0$  — истинное значение частоты сигнала. Тогда

$$\begin{aligned} \xi(f, \varphi) &= k^2 \int_0^T \cos \omega_0 t \cos(\omega t + \varphi) dt = \\ &= \cos \varphi \int_0^T k^2 \cos \omega t \cos \omega_0 t dt - \sin \varphi \int_0^T k^2 \cos \omega_0 t \sin \omega t dt \end{aligned}$$

и огибающая

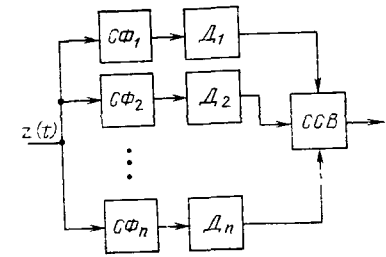
$$V(f) = \sqrt{\left( k^2 \int_0^T \cos \omega_0 t \cos \omega t dt \right)^2 + \left( k^2 \int_0^T \cos \omega_0 t \sin \omega t dt \right)^2}.$$

При выполнении условий  $(f - f_0)T \ll 1$ ,  $f_0 T \gg 1$ , учитывая приближения  $\cos \Delta \omega t \approx 1 - (\Delta \omega t)^2/2$ ,  $\sin \Delta \omega t \approx \Delta \omega t$ , получим

$$V(f) = E - 0,5b(\omega - \omega_0)^2, \quad b = ET^2/12.$$

\* Если реализация  $z(t)$  может быть записана и сохранена на долгое время, то вместо набора фильтров можно использовать один фильтр с перестраиваемой средней частотой  $f$  полосы пропускания.

Рис Р.7.4 Структурная схема оптимального измерителя частоты сигнала с неопределенной фазой



Апостериорная вероятность

$$P(f|z) = K_3 \exp[-(\omega - \omega_0)^2 ET^2/12N_0].$$

Из полученного результата следует, что при больших значениях отношения сигнал-шум оптимальная оценка частоты несмещенная ( $M[f] = f_0$ ), а ее дисперсия  $D[f] = 6N_0/ET^2$ . Полученная оценка состоятельна ( $\lim_{T \rightarrow \infty} D[f] = 0$ ) и асимптотически эффективна.

#### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 7.2.

7.2.2. Оценки максимального правдоподобия координат  $\lambda_i$ , полученные при анализе смеси  $z(t) = s(\lambda, t) + n(t)$ , минимизируют функционал  $d = \int_0^T [z(t) - s(\lambda, t)]^2 dt$ , т. е. определяются из соотношений (уравнений) правдоподобия

$$\frac{\partial d}{\partial \lambda_i} = -2 \int_0^T [z(t) - s(\lambda, t)] \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \{s(\lambda, t)\} dt = 0. \quad (\text{Р.7.1})$$

Если под действием слабой помехи  $n(t)$  принимаемое колебание  $z(t)$  получит приращение  $\Delta z(t) = n(t)$ , то координаты сообщения на выходе приемника (детектора) получат приращения  $\Delta \lambda_i$ . Этим приращениям координат соответствует приращение канального сигнала

$$\Delta s(\Delta \lambda, t) = \sum_{i=1}^{B_c} \frac{\partial s(\lambda, t)}{\partial \lambda_i} \Delta \lambda_i. \quad (\text{Р.7.2})$$

Средний квадрат отклонения колебания  $z(t) + \Delta z(t)$  от сигнала  $s(\lambda, t) + \Delta s(\Delta \lambda, t)$  в пространстве Гильберта

$$d = \int_0^T [z(t) + \Delta z(t) - s(\lambda, t) - \Delta s(\Delta \lambda, t)]^2 dt. \quad (\text{Р.7.3})$$

Если оптимальные оценки координат удовлетворяют уравнению правдоподобия  $\partial d/\partial \lambda_i = 0$ , то из (Р.7.3) с учетом (Р.7.1) и (Р.7.2) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T n(t) \frac{\partial}{\partial \lambda_i} [s(\lambda, t)] dt &= \sum_{i=1}^{B_c} \Delta \lambda_i \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial \lambda_i} [s(\lambda, t)] \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial \lambda_i} [s(\lambda, t)] dt. \end{aligned} \quad (\text{Р.7.4})$$

Если  $\partial[s(\lambda, t)]/\partial\lambda_i$  с неодинаковыми индексами ортогональны (что имеет место для всех анализируемых систем модуляции), то из (Р.7.4) следует

$$\Delta\lambda_i = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda_i} [s(\lambda, t)] n(t) dt \right\} / \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda_i} [s(\lambda, t)] \right\}^2.$$

Таким образом, величины  $\Delta\lambda_i$  на выходе оптимального приемника распределены по гауссовскому закону (при гауссовском распределении помехи  $n(t)$ ), не коррелированы при различных  $i$  (вследствие взаимной ортогональности сигналов  $\frac{\partial}{\partial\lambda_i} [s(\lambda, t)]$ ), имеют нулевые математические ожидания и дисперсии:

$$\sigma_i^2 = \overline{\Delta\lambda_i^2} = \left\{ 1 / \left[ \frac{\partial s(\lambda, t)}{\partial\lambda_i} \right]^2 \right\} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \frac{\partial}{\partial\lambda_i} \times \\ \times [s(\lambda, t)] \frac{\partial}{\partial\lambda_i} [s(\lambda, t_1)] \overline{n(t)n(t_1)} dt dt_1.$$

Так как  $\overline{n(t)n(t_1)} = B_n(t, t_1) = 0,5 N_0 \delta(t_1 - t)$ , то с учетом фильтрующего свойства  $\delta$ -функции находим

$$\sigma_i^2 = \overline{\Delta\lambda_i^2} = 0,5 N_0 / \left\{ T \left[ \frac{\partial}{\partial\lambda_i} \{s(\lambda, t)\} \right]^2 \right\}.$$

Так как при любых видах модуляции

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda_{2i-1}} [s(\lambda, t)] \right\}^2 = \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda_{2i}} [s(\lambda, t)] \right\}^2,$$

то коэффициенты при синусах и косинусах одинакового аргумента имеют одинаковые дисперсии:  $\sigma_{2i-1}^2 = \sigma_{2i}^2$ .

В этих условиях  $\varepsilon(t) = \sum_i \Delta\lambda_i \varphi_i(t)$  представляет собой стационарный гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и средней мощностью (дисперсией) на частоте  $f = i/T$ , равной  $\sigma^2(f) = 2\sigma_{2i-1}^2 = 2\sigma_{2i}^2$ .

Поскольку спектральные компоненты ряда Фурье сдвинуты по частоте на  $\Delta f = 1/T$ , получаем

$$G_{\text{вых}}(f) = \sigma^2(f) / \Delta f = N_0 / \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda_i} [s(\lambda, t)] \right\}^2.$$

7.2.3. Для прямых систем модуляции с учетом ортогонального разложения в ряд по функциям, заданным в задаче 7.2.1, находим

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda_i} [s(b(t), t)] \right\}^2 = \left\{ \frac{\partial}{\partial b} [s(b(t), t)] \frac{\partial b(t)}{\partial\lambda_i} \right\}^2 = \\ = \frac{\partial}{\partial b} \{s[b(t), t]\}^2 \varphi_i^2(t).$$

Частотный спектр функции  $\left[ \frac{\partial}{\partial b} s(t) \right]^2$  лежит значительно выше удвоенной верхней частоты спектра сообщения  $b(t)$  (функции  $\varphi_{2i}^2(t)$ ). Так как функции с неперекрывающимися спектрами ортогональны, среднее значение их произведений равно произведению их средних значений. С учетом ортонормированности функций  $\varphi_i(t)$  имеем

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda_i} [s(b(t), t)] \right\}^2 = \left\{ \frac{\partial}{\partial b} [s(b(t), t)] \right\}^2 \varphi_i^2(t) = \\ = \left\{ \frac{\partial}{\partial b} [s(b(t), t)] \right\}^2.$$

Подставляя это соотношение в формулу (7.10), получаем

$$G_{\text{вых}}(f) = N_0 / \left\{ \frac{\partial}{\partial b} [s(b(t), t)] \right\}^2.$$

7.2.6. Сигнал ОМ в месте приема можно записать в виде

$$s(t) = k U_m b(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - k U_m \bar{b}(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $\bar{b}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(t)/(t-\tau) d\tau$  — сигнал, сопряженный сообщению

$b(t)$  \*. Отсюда следует, что однополосную модуляцию нельзя строго считать прямой.

Если записать

$$b(t) = \sum_{i=1}^{B_c} \lambda_{2i-1} \sqrt{2} \sin(2i-1) \frac{2\pi}{T} t + \lambda_{2i} \sqrt{2} \cos 2i \frac{2\pi}{T} t, \\ -\infty < t < \infty,$$

то

$$\bar{b}(t) = \sum_{i=1}^{B_c} \lambda_{2i-1} \sqrt{2} \cos(2i-1) \frac{2\pi}{T} t - \\ - \lambda_{2i} \sqrt{2} \sin 2i \frac{2\pi}{T} t, \quad -\infty < t < \infty.$$

Тогда

$$s(t) = k U_m \left\{ \sum_{i=1}^{B_c} \lambda_{2i} \sqrt{2} \cos \left( \omega_0 t + \varphi_0 - 2i \frac{2\pi}{T} t \right) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{B_c} \lambda_{2i-1} \sqrt{2} \sin \left[ (2i-1) \frac{2\pi}{T} t + \omega_0 t - \varphi_0 \right] \right\}.$$

\* Фактически сообщение финитно и определено лишь на интервале одного периода, а его преобразование Гильберта, строго говоря, отлично от написанного.

Дисперсия координаты шума на выходе оптимального приемника

$$\sigma_i^2 = \Delta \overline{\lambda_i^2} = N_0/2T \overline{\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda_i}\right)^2} = 0,5 N_0/Tk^2 U_m^2.$$

7.2.8 Указание к решению. Ввести обозначение  $v(t) = \int b(t) dt = \Sigma \lambda_i \int \varphi_i(t) dt$  и учесть, что  $\left[\int \varphi_i(t) dt\right]^2 = 1/\omega_i^2$ .

7.2.11. Указание к решению. Принять опорное колебание синхронного детектора

$$s_{по}(t) = 2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

7.2.12. Средняя мощность шума (дисперсия шума) на выходе приемника с учетом решения задачи 7.2.6.

$$P_{ш\ вых} = B_c \sigma_i^2 = 2F_c T \sigma_i^2 = N_0 F_c / k^2 U_m^2.$$

Таким образом,

$$\rho_{вых} = k^2 U_m^2 / \Pi^2 N_0 F_c$$

Средняя мощность сигнала ОМ (см. задачу 7.2.6)  $P_{с\ вых} = k^2 U_m^2 \overline{b^2(t)} = k^2 U_m^2 / \Pi^2$ , поскольку  $\overline{b^2(t)} = \overline{\tilde{b}^2(t)}$ , а  $\int_0^T b(t) \tilde{b}(t) \times \sin(2\omega_0 t + \varphi) dt$  пренебрежимо мал по сравнению с  $\overline{b^2(t)}$ . Поэтому  $\rho_{вых} = k^2 U_m^2 / \Pi^2 N_0 F_c$ , так как при ОМ  $F = F_c$ . Следовательно,

$$g_{ОМ} = \rho_{вых} / \rho_{ш} = 1, \quad g'_{ОМ} = 1.$$

7.2.17. Система АИМ относится к прямым системам модуляции. В качестве переносчика в этой системе используется импульсная последовательность (рис. Р.1.2,а), которую при отсутствии модуляции на интервале длительности сообщения можно записать

$f(t) = \sum_{i=-0,5T/T_n}^{0,5T/T_n} F(t-iT_n)$ , где  $F(t)$  определяет форму импульса, а  $T_n = 0,5/F_n \ll 0,5/F_c$  — период следования импульсов. Сигнал АИМ в месте приема (рис. Р.1.2,б) можно записать

$$s[b(t), t] = kb(t)f(t).$$

Средняя мощность этого сигнала

$$P_{с\ вых} = \overline{\{s[b(t), t]\}^2} = k^2 \overline{b^2(t) f^2(t)} = k^2 \overline{f^2(t)} / \Pi^2, \quad a$$

$$\overline{\left(\frac{\partial}{\partial b} \{s[b(t), t]\}\right)^2} = k^2 \overline{f^2(t)}.$$

Согласно (7.11)

$$g_{АИМ} = \frac{F}{F_c} \frac{k^2 \overline{f^2(t)}}{\Pi^2} \frac{\Pi^2}{k^2 \overline{f^2(t)}} = \frac{F}{F_c} \approx \frac{1}{\tau_n F_c} > 1; \quad g'_{АИМ} = 1.$$

7.2.18. Система ФИМ относится к прямым системам модуляции, а сигнал ФИМ (рис. Р.1.3) можно записать в виде

$$s(t) = k \sum_{i=-0,5T/T_n}^{0,5T/T_n} F(t_i),$$

где  $t_i = t - iT_n + \Delta t_{\max} b(iT_n)$  определяет временное положение модулируемого импульса;  $\Delta t_{\max} b(iT_n)$  — мгновенное значение временного сдвига импульса от среднего положения;  $\Delta t_{\max}$  — максимальное отклонение импульса, соответствующее  $b_{\max}(t) = 1$ . Величина

$$P_{с\ вых} = \overline{\{s(t)\}^2} = \frac{k^2}{T_n} \int_{-0,5\tau_n}^{0,5\tau_n} F^2(t) dt.$$

Определим функцию  $\frac{\partial}{\partial b} [s(t)]$ :

$$\frac{\partial}{\partial b} [s(t)] = \frac{\partial [s(t)]}{\partial t_i} \frac{dt_i}{db} = \Delta t_{\max} k \sum_{i=-0,5T/T_n}^{0,5T/T_n} \frac{\partial F(t_i)}{\partial t_i}.$$

Так как при ФИМ  $\overline{\left[\frac{\partial F(t_i)}{\partial t_i}\right]^2} = \overline{\left[\frac{\partial F(t)}{\partial t}\right]^2}$ , число импульсов на интервале  $T$  равно  $T/T_n$  и они не перекрываются, то можно записать

$$\overline{\left\{\frac{\partial}{\partial b} [s(t)]\right\}^2} = \Delta t_{\max}^2 k^2 \frac{1}{T_n} \int_{-0,5\tau_n}^{0,5\tau_n} \left[\frac{\partial F(t)}{\partial t}\right]^2 dt.$$

С учетом этого результата находим

$$g_{ФИМ} = \frac{1}{\Pi^2 K_\Phi} \left(\frac{\Delta t_{\max}}{\tau_n}\right)^2 \frac{F}{F_c}; \quad g'_{ФИМ} = \frac{1}{\Pi^2 K_\Phi} (\Delta t_{\max} / \tau_n)^2.$$

Здесь

$$K_\Phi = \left[ \int_{-0,5\tau_n}^{0,5\tau_n} F^2(t) dt \right] / \left\{ \tau_n^2 \int_{-0,5\tau_n}^{0,5\tau_n} \left[\frac{\partial F(t)}{\partial t}\right]^2 dt \right\} -$$

коэффициент, определяемый формой импульса. Для обычно используемых импульсов плавной формы  $K_\Phi \approx 0,1$ ,  $F \approx 1/\tau_n$ . Поскольку

$$\Delta t_{\max} \leq 0,5 T_n = 0,5 / F_n \leq 0,25 / F_c, \quad \text{то} \quad \left(\frac{\Delta t_{\max}}{\tau_n}\right)^2 \leq \frac{1}{16} \left(\frac{F}{F_c}\right)^2.$$

Предельные значения выигрыша и обобщенного выигрыша при ФИМ

$$g_{ФИМ} = \frac{0,6}{\Pi^2} \left(\frac{F}{F_c}\right)^3; \quad g'_{ФИМ} \approx \frac{0,6}{\Pi^2} \left(\frac{F}{F_c}\right)^2.$$

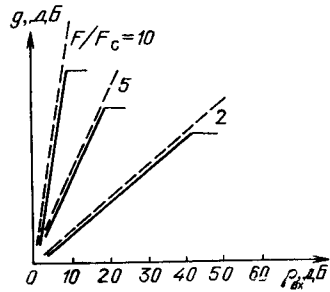


Рис. Р.7.5. Зависимость выигрыша системы модуляции от отношения сигнал-шум в канале для идеальной (---) и для реальной (—) систем

7.2.19. Указание к решению. Принять пик-фактор промежуточного сигнала при ЧМ и ФМ равным  $\sqrt{2}$ , при АМ —  $\sqrt{2(1+m)}/\sqrt{2+m^2}$ , при ОМ — П, при БМ —  $\sqrt{2}\Pi$ . Учтеть, что на второй ступени во всех системах осуществляется прямая модуляция.

7.2.20. Для идеальной системы связи при гауссовском источнике и канале согласно [7] выигрыш

$$g = [(1 + \rho_{\text{вх}})^\alpha - 1] / \rho_{\text{вх}}.$$

Зависимость  $g(\rho_{\text{вх}})$  при некоторых значениях коэффициента  $\alpha = F/F_c$  дана на рис. Р.7.5. Для всех рассмотренных нами реальных систем модуляции при слабом шуме  $g = g_0$  не зависит от  $\rho_{\text{вх}}$  (непрерывные линии на рис. Р.7.5). Предельные минимально возможные значения порога  $\rho_{\text{пор}}$  при заданном  $K_F$  можно определить как точки пересечения непрерывных и штриховых кривых рис. Р.7.5 или из уравнения

$$[(1 + \rho_{\text{пор}})^\alpha - 1] / \rho_{\text{пор}} = g_0.$$

Для системы ОМ (без частотной избыточности,  $\alpha = 1$ ) это соотношение удовлетворяется при любом значении  $\rho_{\text{пор}}$  (в том числе при  $\rho_{\text{пор}} = 0$ ), т. е. для этой системы пороговый эффект отсутствует. Для системы БМ  $\alpha = 2$ ,  $g_0 = 2$ ,  $\rho_{\text{пор}} = 0$ .

При  $\alpha \gg 1$  (системы с большой частотной избыточностью) следует величина порога

$$\rho_{\text{пор}} \approx g_0^{1/\alpha}.$$

Отсюда видно, что с ростом частотной избыточности системы падает порог, стремясь к 1 при  $\alpha \rightarrow \infty$ .

### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 7.3.

7.3.1. Коэффициент передачи оптимального фильтра

$$K_0(\omega) = \begin{cases} f/F & \text{при } 0 < f \leq F \\ 0 & \text{при } f > F. \end{cases}$$

Согласно [12] энергетические спектры в полосе  $(0, F)$  равны: для сигнала ошибки  $G_e(f) = A(f/F - f^2/F^2)$ , для полезного сигнала  $G_{ys}(f) = Af^3/F^3$ , для шума  $G_{yn}(f) = A(f^2/F^2 - f^3/F^3)$ .

Средняя мощность сигнала ошибки

$$\bar{\varepsilon}^2 = \int_0^F G_e(f) df = AF/6.$$

Средняя мощность полезного сигнала

$$\bar{y}_s^2 = \int_0^F G_{ys}(f) df = AF/4.$$

Средняя мощность шума

$$\bar{y}_n^2 = \int_0^F G_{yn}(f) df = AF/12; \rho_{\text{вых}} = 3.$$

7.3.2. В полосе  $(0, F)$  энергетический спектр сигнала ошибки

$$G_e(f) = G_s(f) [K(\omega) - 1]^2 + G_n(f) K^2(\omega) = (K_0 - 1) Af/F + K_0^2 A (1 - f/F).$$

Дисперсия сигнала ошибки

$$\bar{\varepsilon}^2 = 0,5 AF [(K_0 - 1)^2 + K_0^2].$$

При  $K_0 = 0,5$   $\bar{\varepsilon}^2 = AF/4$  (это минимальное значение), что в 1,5 раза больше, чем для оптимального фильтра. Легко показать, что  $\rho_{\text{вых}} = \bar{y}_s^2 / \bar{y}_n^2 = 1$ . Эта величина в 3 раза меньше, чем для оптимального фильтра.

7.3.4. Пусть на входе заданной схемы действует напряжение с комплексной амплитудой  $\dot{U}_1$ , а на выходе  $\dot{U}_2$ . Тогда передаточная функция

$$F_p(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) H(j\omega) / \dot{U}_1 = H(j\omega) - H(j\omega) F_p(j\omega).$$

Отсюда

$$H(j\omega) = F_p(j\omega) / [1 - F_p(j\omega)].$$

7.3.6. Указание к решению. Воспользоваться методикой решения задачи 7.3.4 для определения коэффициента передачи заданной схемы.

7.3.7. Пусть  $S(t)$  — гауссовский случайный стационарный процесс с корреляционной функцией  $B(t_1, t_2) = P_c \exp(-\alpha |t_2 - t_1|)$ , а  $N(t)$  — стационарный белый шум со спектральной плотностью  $N_0/2$ . Процесс  $S(t)$  можно задать дифференциальным уравнением 1-го порядка [12]

$$dS/dt + \alpha S(t) = \sqrt{2\alpha P_c} V(t), \quad S(-\infty) = 0.$$

Здесь  $V(t)$  — центрированный белый шум с единичной спектральной плотностью мощности.

Энергетический спектр

$$G_s(f) = \frac{2\alpha P_c}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}.$$

Сравнивая уравнение состояния для  $S(t)$  с (7.20), находим

$$f(t) = -\alpha, \quad g(t) = \sqrt{2\alpha P_c}.$$

В установившемся режиме уравнение (7.23) примет вид

$$0 = -2\alpha\kappa - \kappa^2 \cdot 2/N_0 + 2\alpha P_c.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем

$$\kappa = \alpha (N_0/2) (\sqrt{1 + \Lambda} - 1) = 0,5 \alpha N_0 g(t),$$

где  $\Lambda = 4P_c/\alpha N_0$ .

С учетом полученного результата уравнение (7.20) принимает вид

$$d\hat{S}/dt = -\alpha\hat{S}(t) + \alpha(\sqrt{1 + \Lambda} - 1)[z(t) - S(t)].$$

7.3.8. Указание к решению. Воспользоваться уравнением (7.23), положив его левую часть равной нулю в установившемся режиме.

7.3.14. Пусть линейный фильтр имеет комплексный коэффициент передачи  $K(j\omega) = K(\omega) \exp[j\varphi(\omega)]$ . При подаче на вход такого фильтра сигнала  $s(t)$  известной формы с комплексным спектром  $S(j\omega) = S(\omega) \exp[j\theta(\omega)]$  для отклика фильтра получим

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) K(\omega) \exp\{j[\omega t + \theta(\omega) + \varphi(\omega)]\} df.$$

Если спектральная плотность белого шума на входе фильтра  $N_0/2$ , то средняя мощность шума на выходе

$$P_{\text{ш.вых}} = 0,5 N_0 \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) df.$$

Предполагая, что пик полезного сигнала на выходе наблюдается в некоторый момент  $t_0$ , запишем

$$s_{\text{вых}}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) K(\omega) \exp\{j[\omega t_0 + \theta(\omega) + \varphi(\omega)]\} df.$$

Отношение пиковой мощности сигнала и средней мощности шума

$$r^2 = \frac{|s_{\text{вых}}(t_0)|^2}{P_{\text{ш.вых}}} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) K(\omega) \exp\{j[\omega t_0 + \theta(\omega) + \varphi(\omega)]\} df \right|^2}{0,5 N_0 \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) df}.$$

Найдем максимум этой величины. Для этого воспользуемся неравенством Буняковского — Шварца [12]:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx},$$

причем равенство достигается при  $f_2(x) = af_1(x)$ ,  $a$  — постоянная.

Примем  $f_1(x) = S(\omega) \exp\{j[\omega_0 t + \theta(\omega) + \varphi(\omega)]\}$ ,  $f_2(x) = K(\omega)$ . С учетом неравенства Буняковского — Шварца имеем

$$r^2 \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) df,$$

где  $\int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) df = E = P_s T$  — энергия сигнала. Поэтому

$$r^2 \leq 2E/N_0 = 2P_c T/N_0 = r_{\text{макс}}^2, \quad r_{\text{макс}}^2 = 2h^2 = 2\rho_{\text{вх}} FT.$$

Величина  $r^2$  достигает максимума при  $f_2(x) = af_1(x)$  или при  $K(j\omega) = aS(\omega) \exp\{j[\omega t_0 + \theta(\omega) + \varphi(\omega)]\}$ . Но это возможно лишь при  $K_0(\omega) = aS(\omega)$  и  $\omega t_0 + \theta(\omega) + \varphi_0(\omega) = 0$ , т. е. при  $\varphi_0(\omega) = -\omega t_0 - \theta(\omega)$ . Это означает, что комплексный коэффициент передачи оптимального фильтра

$$K_0(j\omega) = aS(\omega) \exp\{-j[\omega t_0 + \theta(\omega)]\} = aS(-j\omega) \exp(-j\omega t_0),$$

где  $S(-j\omega)$  — комплексно-сопряженный спектр сигнала  $S(t)$ . Фильтр с таким комплексным коэффициентом передачи называют согласованным с сигналом  $s(t)$  (см. § 6.2).

7.3.15. Комплексный спектр заданного сигнала

$$S(j\omega) = k \int_{\Delta}^{\Delta + \tau_n} \exp(-j\omega t) dt = \frac{k \exp(-j\omega \Delta)}{j\omega} [1 - \exp(-j\omega \tau_n)].$$

Коэффициент передачи согласованного фильтра

$$K_{\text{с.ф}}(j\omega) = aS(-j\omega) \exp(-j\omega t_0) = \frac{ak}{j\omega} [e^{j\omega(\tau_n + \Delta)} - e^{j\omega \Delta}] e^{-j\omega t_0}.$$

Потребуем  $t_0 = \tau_n + \Delta$  или получения пикового значения сигнала на выходе фильтра в момент окончания входного сигнала (если  $\Delta$  меняется в пределах  $(0, T - \tau_n)$ , то  $t_0$  меняется в пределах  $(\tau_n, T)$ . Тогда

$$K_{\text{с.ф}}(j\omega) = \frac{ak}{j\omega} [1 - e^{-j\omega \tau_n}].$$

Фильтр с такой передаточной функцией реализуется схемой рис. 7.5,б.

Согласно решению задачи 7.1.1 максимально правдоподобная оценка амплитуды видеопульса на фоне белого шума пропорциональна величине

$$K = k \int_{\Delta}^{\Delta + \tau_n} z(t) dt,$$

которая определяется напряжением на выходе согласованного фильтра в момент  $t_0$  окончания сигнала на входе. Согласно свойству согласованного фильтра в этот момент его выходное напряжение максимально. Следовательно, по максимуму этого напряжения можно получить оптимальную оценку амплитуды независимо от значения задержки  $\Delta$ .

Оптимальная оценка положения фронта видеопульса должна максимизировать величину

$$K_1 = \frac{2k}{N_0} \int_{\Delta}^{\Delta+\tau_n} z(t) dt - \frac{k^2}{N_0}.$$

Для любого значения  $k$  величина  $K_1$  максимизируется, если максимально  $K = k \int_{\Delta}^{\Delta+\tau_n} z(t) dt$ . По моменту наблюдения максимума

этой величины  $t_{\max}$  можно найти оптимальную оценку  $\hat{\Delta} = t_{\max} - \tau_n$ . Параметр  $r^2$  на выходе согласованного фильтра равен  $r^2 = 2k^2 = 2P_c \tau_n / N_0 = 2k^2 \tau_n / N_0$ .

7.3.17. Указание к решению. Для решения задачи воспользоваться теоремой об огибающей.

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГЛАВЫ 8

### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 8.1.

8.1.1. Согласно решению задачи 6.4.3 в заданных условиях  $\rho_{\text{ош}} = 0,5 \exp(-0,5h^2)$ . Если требуется обеспечить  $\rho_{\text{ош}} \leq 10^{-5}$ , то в системе без переприема ( $k=1$ ) необходимо иметь  $h^2 = -2 \ln(2\rho) = 21,6$ . При использовании  $k$  ретрансляторов на каждом из них необходимо обеспечить  $\rho_1 \leq \rho_{\text{ош}}/k$  или  $h^2 = -2 \ln(2\rho_{\text{ош}}/k)$ . Таким образом, при  $k=10$   $h^2 = -2 \ln(2 \cdot 10^{-6}) = 26,2$ ; при  $k=100$   $h^2 = -2 \ln(2 \cdot 10^{-7}) = 30,8$ ; при  $k=1000$   $h^2 = -2 \ln(2 \cdot 10^{-8}) = 35,5$ .

8.1.4. Согласно (8.4) имеем  $P_B/P_\epsilon = 3(L-1)^2/\Pi^2 = 3(128-1)^2/3 = 16129$  или 42,07 дБ.

8.1.5. Воспользовавшись соотношением (8.4), получим

$$P_B/P_\epsilon = 3(2^n - 1)^2/\Pi^2 = (2^8 - 1)^2/3 = 21675 \text{ или } 43,4 \text{ дБ.}$$

8.1.8. Воспользуемся соотношением (8.6). Легко заметить, что сумма в этом выражении есть не что иное, как сумма первых членов геометрической прогрессии, знаменатель которой  $q=4$ , а первый член равен 1. С учетом этого, приняв во внимание (8.4), находим

$$\overline{\epsilon_{\text{л.н}}^2} = p \frac{4}{(2^n - 1)^2} \frac{4^n - 1}{3} = \frac{4}{3} p \frac{4^n - 1}{4^n - 2^{n+1} + 1}.$$

При  $p=10^{-5}$   $\overline{\epsilon_{\text{л.н}}^2} = 1,35 \cdot 10^{-5}$ ; при  $p=10^{-6}$   $\overline{\epsilon_{\text{л.н}}^2} = 1,35 \cdot 10^{-6}$ ; при  $p=10^{-7}$   $\overline{\epsilon_{\text{л.н}}^2} = 1,35 \cdot 10^{-7}$ .

8.1.10. Согласно (8.2) с учетом (8.4) находим  $\overline{\epsilon^2} = 1/3(2^7 - 1)^2 = 2,07 \cdot 10^{-5}$ . При  $p=10^{-5}$  и  $n=7$   $\overline{\epsilon_{\text{л.н}}^2} = 1,35 \cdot 10^{-5}$  (см. решение задачи 8.1.8). Суммарная мощность шума квантования и шума ложных импульсов согласно (8.7)  $\overline{\epsilon_\Sigma^2} = 3,42 \cdot 10^{-5}$ . Полезно заметить,

что с уменьшением вероятности ошибки  $p$  влияние шума ложных импульсов становится пренебрежимо малым. Величина отношения

$$P_B/P_{\epsilon_\Sigma} = 1/\Pi^2 \overline{\epsilon_\Sigma^2} = 10^5/3,42 \cdot 3 \approx 9746.$$

8.1.12. При ширине спектра сообщения  $F_c$  минимальная частота дискретизации согласно теореме Котельникова равна  $2F_c$ . Каждый отсчет после квантования может принимать  $L = 2B_{\text{макс}}/\Delta b + 1$  возможных дискретных значений и заменяется при кодировании комбинацией из  $n = \log_m L$   $m$ -ичных импульсов. Длительность каждого импульса не может быть больше, чем  $\tau_n = 1/(2F_c \log_m L)$ , а необходимая полоса определяется как  $F' \approx 1/\tau_n = 2F_c \log_m L$ . При  $m=2$   $F' = 2F_c \log_2 L$ . Для заданного значения  $F_c = 3,1$  кГц  $F' = 6,2 \log_2 L$  кГц.

8.1.15. Из заданного выражения для вероятности ошибки находим  $\rho_{\text{вх}} = 2 \ln(1/2\rho)$ . Если допустить, что система ИКМ используется для передачи речевых сообщений, то ошибочный прием символов кодовой комбинации приводит к появлению отдельных «щелчков». Если ошибок много, то отдельные «щелчки» переходят в сильный шум. В системе ИКМ за одну минуту передается  $2F_c n \cdot 60$  кодовых импульсов. При вероятности ошибки  $p$  на  $k$  ретрансляционных участках будет в минуту в среднем  $p k \cdot 120 F_c n$  ошибочно принимаемых импульсов. Если считать допустимым при работе системы ИКМ один «щелчок» в минуту, то  $\rho_{\text{доп}} = 1/(120 k n F_c)$  и  $\rho_{\text{вх}} = 2 \ln(60 k n F_c)$ .

8.1.16. Если примерно считать, что для телефонии с ИКМ  $F_k = 2nF_c = 2 \cdot 7 \cdot 3000 = 42000$  Гц, то  $\rho_{\text{вх}} = 2 \ln(60 \cdot 42000 k) \approx 4,6 \ln k + 29,4$ . Если  $k=1$ , то  $\rho_{\text{вх}} \approx 29,4$ . При пренебрежении ошибками на выходе следует учитывать только шум квантования. В этом случае  $\rho_{\text{вых}} = P_B/\overline{\epsilon^2} \approx 5400$  (согласно (8.4)). Выигрыш  $g_{\text{ИКМ-ЧМ}} = 5400/29,4 \approx 170$ , а обобщенный выигрыш  $g'_{\text{ИКМ-ЧМ}} = g/2n \approx 12$ .

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГЛАВЫ 9

### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 9.1.

9.1.1. Представим групповой сигнал согласно (9.1):

$$s(t) = \sum_{k=1}^N s_k(t) - \sum_{k=N+1}^{2N} s_k(t) = \sum_{k=1}^N \psi_k(t) (C_k - C_{k+N}).$$

Легко заметить, что при  $C_k = C_{k+N} \neq 0$   $s(t) = 0$ .

Это означает, что при использовании сигналов биортогональной системы в качестве канальных переносчиков информации в многоканальной системе связи нельзя осуществить однозначное разделение сигналов. Этот вывод подтверждается и при проверке условия (9.2).



В самом деле, для биортогональной системы определитель Грама

$$D = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1,N} & -\rho_{1,N+1} & -\rho_{1,N+2} & \dots & -\rho_{1,2N} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2,N} & -\rho_{2,N+1} & -\rho_{2,N+2} & \dots & -\rho_{2,2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{N,1} & \rho_{N,2} & \dots & \rho_{N,N} & -\rho_{N,N+1} & -\rho_{N,N+2} & \dots & -\rho_{N,2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\rho_{2N,1} & -\rho_{2N,2} & \dots & -\rho_{2N,N} & \rho_{2N,N+1} & \rho_{2N,N+2} & \dots & \rho_{2N,2N} \end{vmatrix}.$$

Легко показать, что линейным сложением элементов отдельных строк или столбцов (что не изменяет величину определителя) можно получить матрицу с нулевыми элементами по какой-либо строке или столбцу, что приводит к результату  $D=0$ .

9.1.2. Для системы ортогональных функций  $\{s_k(t)\}$  определитель Грама принимает вид

$$D = \begin{vmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho_{NN} \end{vmatrix} = \rho_{11} \rho_{22} \dots \rho_{NN}.$$

Величина  $\rho_{kk} = \frac{1}{T} \int_0^T s_k(t) s_k(t) dt = E_k$  — энергия сигнала  $s_k(t)$ .

Если энергия хотя бы одной реализации  $s_k(t)$  будет равна нулю, то определитель Грама  $D = \rho_{11} \rho_{22} \dots \rho_{NN} = 0$  и условие линейной независимости не выполняется.

9.1.3. Составим определитель Грама. В данном случае

$$D = \begin{vmatrix} 0,5a_1^2 & 0,5a_1 a_2 \cos \Delta\varphi \\ 0,5a_1 a_2 \cos \Delta\varphi & 0,5a_2^2 \end{vmatrix} = 0,25a_1^2 a_2^2 (1 - \cos^2 \Delta\varphi).$$

Замечаем, что  $D=0$  только при условии  $\cos^2 \Delta\varphi = 1$  или при  $\Delta\varphi = k\pi$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ).

Следовательно, однозначное разделение сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  возможно при любых значениях  $\Delta\varphi$ , кроме  $\Delta\varphi = k\pi$ .

9.1.4. Найдем опорные сигналы  $\{\eta_k(t)\}$ . Согласно (9.4) должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t) \eta_1(t) dt &\neq 0; & \frac{1}{T} \int_0^T s_2(t) \eta_1(t) dt &= 0; \\ \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t) \eta_2(t) dt &= 0, & \frac{1}{T} \int_0^T s_2(t) \eta_2(t) dt &= 0, \end{aligned}$$

т. е. опорный сигнал  $\eta_1(t)$  ортогонален сигналу  $s_2(t)$ , а опорный сигнал  $\eta_2(t)$  ортогонален сигналу  $s_1(t)$ . Так как ортогональность

можно обеспечить сдвигом сигналов  $\eta_i(t)$  и  $s_k(t)$  ( $i \neq k$ ) на угол  $\pi/2$ , получим

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \frac{A_1}{\sin \Delta\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi - \pi/2), \\ \eta_2(t) &= \frac{A_2}{\sin \Delta\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2), \end{aligned}$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — постоянные коэффициенты.

Масштабные множители  $A_1/\sin \Delta\varphi$  и  $A_2/\sin \Delta\varphi$  определяются из условия (9.3).

При  $\Delta\varphi = \pi/2$   $\eta_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ ,  $\eta_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2)$ . В этом случае опорные сигналы совпадают по фазе с сигналами индивидуальных каналов.

9.1.5. Для данного случая определитель Грама

$$D = \begin{vmatrix} 0,5a_1^2 & 0,5a_1 a_2 \cos \Delta\varphi_1 \\ 0,5a_1 a_2 \cos \Delta\varphi_1 & 0,5a_2^2 \\ 0,5a_1 a_3 \cos \Delta\varphi_2 & 0,5a_2 a_3 \cos(\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1) \\ 0,5a_1 a_3 \cos \Delta\varphi_2 & 0,5a_2 a_3 \cos(\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1) \\ 0,5a_2^2 & 0,5a_3^2 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} &= 0,125a_1^2 a_2^2 a_3^2 \times \\ &\times [1 + 2 \cos \Delta\varphi_1 \cos \Delta\varphi_2 \cos(\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1) - \cos^2 \Delta\varphi_1 - \cos^2 \Delta\varphi_2 - \\ &- \cos^2(\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1)]. \end{aligned}$$

Величина  $0,125a_1^2 a_2^2 a_3^2 \neq 0$  при ненулевых  $a_k$ .

Найдем, чему равна величина совокупности слагаемых в скобках:

$$\begin{aligned} &1 + 2 \cos \Delta\varphi_1 \cos \Delta\varphi_2 \cos(\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1) - \cos^2 \Delta\varphi_1 - \cos^2 \Delta\varphi_2 - \\ &- \cos^2(\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1) = \sin^2 \Delta\varphi_2 \cos^2 \Delta\varphi_1 - \cos^2 \Delta\varphi_1 \sin^2 \Delta\varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

Поскольку при любых  $\Delta\varphi_1$  и  $\Delta\varphi_2$  определитель Грама для выбранной системы сигналов равен нулю, эти сигналы являются линейно зависимыми и, следовательно, их однозначное разделение невозможно.

9.1.6. При ортогональном ансамбле согласно (9.4) опорные сигналы  $\eta_k(t) = C_k s_k(t)$ , где  $C_k$  — коэффициент пропорциональности. Подставляя в (9.3) вместо  $s(t)$  принимаемое колебание  $z(t) = s(t) + n(t)$  и выражение для  $\eta_k(t)$ , получаем алгоритм обработки в  $k$ -м канале:

$$L[z(t)]_k = \frac{1}{T} \int_0^T C_k z(t) s_k(t) dt.$$

Если все реализации отдельных канальных сигналов  $A_{k,i} s_k(t)$  ( $i$  — номер реализации) известны в месте приема (а это возмож-

но при дискретном ансамбле  $\{A_{k,i}\}$ , то можно выбрать  $C_{k,i} = A_{k,i}T$  и в каждом канале реализовать алгоритм

$$L[z(t)]_k = \max \left[ \int_0^T z(t) C_{k,i} s_k(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T A_{k,i}^2 s_k^2(t) dt \right],$$

что обеспечивает минимум вероятности ошибки при стационарном белом шуме в канале (см. гл. 6).

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 9.2.

9.2.1. Величину  $F_1$  найдем из условия, что в полосе  $f_k \pm F_1$  содержится 95% мощности канального сигнала:

$$\int_{f_k - F_1}^{f_k + F_1} A \exp[-\beta^2 (\omega - \omega_k)^2] df = 0,95 A \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\beta^2 (\omega - \omega_k)^2] df.$$

После очевидных преобразований получим уравнение  $\Phi(2\pi \times \sqrt{F_1} \sqrt{2\beta}) = 0,95$ , где  $\Phi(x)$  — функция Крампа.

По таблицам  $\Phi(x)$  находим  $2\pi F_1 \sqrt{2\beta} = 1,96$ , откуда при  $\beta = 1,23 \cdot 10^{-4}$  с получаем  $F_1 = 1,8$  кГц.

Разнос между несущими частотами индивидуальных каналов  $2F_1 = 3,6$  кГц. Аналогичным образом находим величину  $F_2$ , считая, что в полосе  $f_k \pm F_2$  сосредоточено 90% мощности канального сигнала:

$$\int_{f_k - F_2}^{f_k + F_2} A \exp[-\beta^2 (\omega - \omega_k)^2] df = 0,9 A \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\beta^2 (\omega - \omega_k)^2] df.$$

Отсюда получаем  $\Phi(2\sqrt{2}\pi F_2 \beta) = 0,9$  и  $F_2 = 1,5$  кГц. Из условия равенства коэффициента передачи фильтра 0,1 на частотах  $f_k \pm F_1$  находим полосу  $F_3$ , на границе которой коэффициент передачи фильтра обращается в нуль:

$$F_3 = (F_1 - F_2)/0,9 + F_2, F_3 = 1,83 \text{ кГц.}$$

Определим мощность сигнала на выходе разделительного фильтра  $k$ -го канала, полагая, что в полосе частот от  $f_k + F_2$  до  $f_k + F_3$  коэффициент передачи фильтра по мощности изменяется по закону  $K^2(\omega) = 1 - [f - (f_k + F_2)/(F_3 - F_2)]$ :

$$P_c = 2 \int_{f_k}^{f_k + F_2} A \exp[-\beta^2 (\omega - \omega_k)^2] df + 2 \int_{f_k + F_2}^{f_k + F_3} A [1 - (f - f_k - F_2)/(F_3 - F_2)] \exp[-\beta^2 (\omega - \omega_k)^2] df.$$

После очевидных преобразований получаем

$$P_c = A (2\beta \sqrt{\pi})^{-1} \{ \Phi(2\sqrt{2}\pi\beta F_3) + F_2 (F_3 - F_2)^{-1} \times \\ \times [\Phi(2\sqrt{2}\pi\beta F_3) - \Phi(2\sqrt{2}\pi\beta F_2)] + [2\beta \sqrt{\pi^3} (F_3 - F_2)]^{-1} \times \\ \times [\exp(-\beta^2 4\pi^2 F_3^2) - \exp(-\beta^2 4\pi^2 F_2^2)] \}.$$

Вычисляя, находим  $P_c = 10,9 \cdot 10^{-3}$  Вт.

Мощность переходной помехи (заштрихованная область на рис. 9.2) определим с некоторым превышением, полагая, что в полосе  $f_k \pm F_3$  характеристика фильтра равномерна, а переходная помеха создается только двумя соседними каналами:

$$P_{п.п} = 2 \int_{f_k + 2F_1 - F_3}^{f_k + 2F_1 + F_3} A \exp[-\beta^2 (\omega - \omega_k)^2] df = A (2\beta \sqrt{\pi})^{-1} \times \\ \times \{ \Phi[2\sqrt{2}\pi\beta (2F_1 + F_3)] - \Phi[2\sqrt{2}\pi\beta (2F_1 - F_3)] \}.$$

После вычислений получаем  $P_{п.п} = 6,55 \cdot 10^{-4}$  Вт. Отношение сигнал-переходная помеха на выходе разделительного фильтра  $k$ -го канала  $P_c/P_{п.п} = 16,6$ .

9.2.2. Используя равенство Парсеваля [10], условие (9.5) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_k(j\omega) S_l(-j\omega) \exp(j\omega\tau) df = 0,$$

где  $S_k(j\omega)$  — комплексный спектр сигнала  $s_k(t)$ ;  $S_l(-j\omega)$  — функция комплексно-сопряженная спектру сигнала  $s_l(t)$ .

Поскольку при классическом частотном разделении амплитудные спектры канальных сигналов не должны существенно перекрываться, то сформулированное условие действительно выполняется (на практике приближенно). Следовательно, при частотном разделении используются канальные сигналы, сохраняющие взаимную ортогональность при произвольных взаимных сдвигах. Правда, это достигается существенным расширением занимаемой полосы частот по сравнению с минимально возможной величиной.

9.2.9. Амплитудный спектр группового сигнала системы связи показан на рис. Р.9.1. В данной системе спектры индивидуальных сигналов существенно перекрываются.

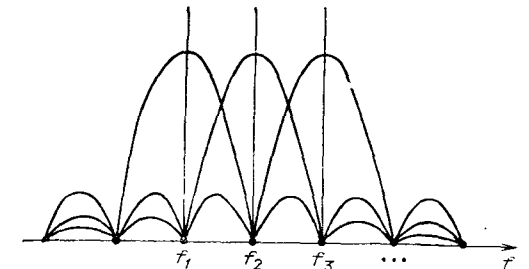


Рис. Р.9.1. Амплитудный спектр группового сигнала многоканальной системы связи с ортогональными сигналами

Для надежного разделения каналов на интервале анализа должно выполняться условие ортогональности индивидуальных сигналов

$$\int_0^{T_a} \cos(2\pi f_i t + \varphi_i) \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) dt = 0, \quad i \neq k$$

или  $f_i = (2i + N)/(2T_a)$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Поскольку разное между соседними канальными частотами  $\Delta f = f_{i+1} - f_i = [2(i+1) + N - 2i - N]/(2T_a) = 1/(2T_a)$ , получаем  $T_a = 1/(2\Delta f) = 7,04$  мс. Интервал  $\Delta T = T_c - T_a = 1,291$  мс используется для гашения колебаний соседних посылок.

9.2.10. Согласно условию разделения (9.5)

$$\begin{aligned} \int_0^T x_k(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) x_l(t + \tau) \cos[\omega_0(t + \tau) + \varphi_0] dt = \\ = 0,5 \cos \omega_0 \tau \int_0^T x_k(t) x_l(t + \tau) dt + 0,5 \int_0^T x_k(t) x_l(t + \\ + \tau) \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\varphi_0) dt. \end{aligned}$$

При  $T \gg 2\pi/\omega_0$  и узкополосных канальных сигналах ( $1/\tau \ll f_0$ ) вторым интегралом можно пренебречь. В этом случае канальные сигналы могут быть разделены при  $B_{k,l}(\tau) = \int_0^T x_k(t) x_l(t + \tau) dt = 0$ , т. е.

если двоичные последовательности, образующие «адреса» отдельных каналов, ортогональны при произвольном взаимном сдвиге.

Если в качестве индивидуальных сигналов использовать последовательности Хаффмена с большим числом элементов за период повторения  $N_k$  и  $N_l$ , то  $B_{k,l}(\tau) = 1/(N_k N_l) \approx 0$ .

9.2.11. Заданной реализации ЧВМ соответствует сигнал, показанный на рис. 9.2,а. На выходе четырех амплитудных детекторов выделяются видеоимпульсы, взаимное расположение которых показано на рис. Р.9.2,б. Четыре линии задержки обеспечивают совмещение во времени отдельных видеоимпульсов, а суммарный сигнал с амплитудой  $4h$ , превышая порог схемы совпадения, выдает

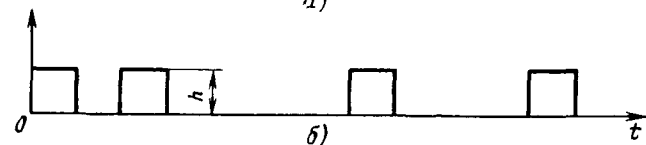
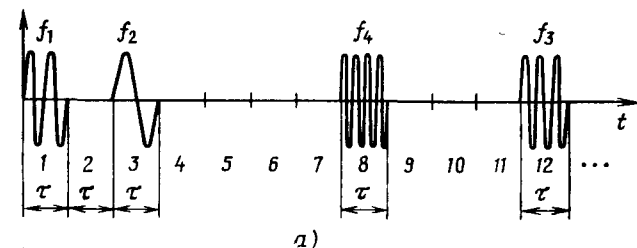


Рис. Р.9.2. Канальный сигнал асинхронно-адресной системы связи (а) и сигналы на выходе амплитудных детекторов (б)

на выходе рабочий импульс, по которому считается информация (при передаче аналоговой информации посредством ФИМ она содержится в положении импульса относительно точки отсчета).

9.2.12. Полагая, что в каждой адресной комбинации используются четыре импульса (занимающих определенные положения из 17 возможных) с различными мгновенными частотами, нетрудно написать выражение для числа возможных кодовых комбинаций (числа каналов):  $4! \cdot C_{16}^3 = 24 \cdot 560 = 13440$ , где  $C_{16}^3$  — это число сочетаний, которое можно выполнить при фиксации первого импульса (остается 16 свободных мест для размещения трех импульсов);  $4!$  — это число возможных перестановок из четырех, определяющее разнообразие взаимного размещения четырех импульсов с различными мгновенными частотами.

9.2.13. Каждый импульс, несущий информацию об отсчете, передается в асинхронно-адресной системе посредством  $l$ -разрядной кодовой комбинации. Для многоканальной системы с ФИМ должно выполняться условие

$$N [\Delta t_{\text{макс}} + (l-1) \tau_{\text{н}}] = T_{\text{н}} = 1/(2 F_{\text{макс}}).$$

Полагая  $N = 13440$ ,  $F_{\text{макс}} = 3400$  Гц,  $\Delta t_{\text{макс}} = 128 \tau_{\text{н}}$ ,  $l = 17$ , получаем

$$\tau_{\text{н}} = 0,5 / (F_{\text{макс}} N [l-1 + 128]) = 7,6 \cdot 10^{-11} \text{ с.}$$

Полоса сигнала  $F \approx 2/\tau_{\text{н}} = 2,7 \cdot 10^{10}$  Гц.

9.2.16. Графики первых шести функций Радемахера приведены на рис. Р.9.3. Наименьшую длительность элементарного импульса имеет функция  $r_5(\theta)$ . При переходе  $T = 20$  мс  $\tau = T/32$ . Полоса частот, которая требуется при передаче сообщений этими сигналами  $F \approx 1/\tau = 32/T = 1600$  Гц.

9.2.18. Согласно (6.22) вероятность ошибки в четырехпозиционной системе ДЧМ в гауссовском канале с неопределенной фазой

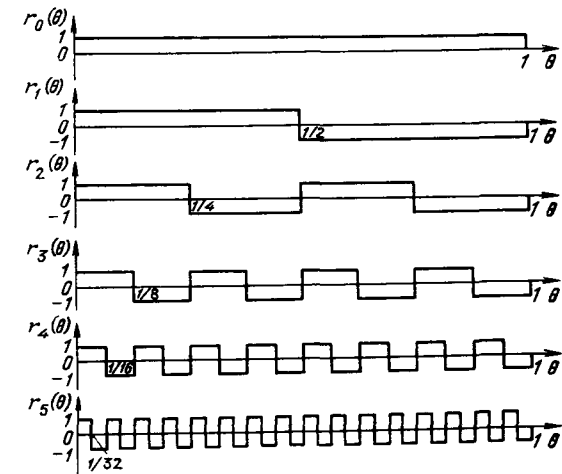


Рис. Р.9.3. Графики функций Радемахера

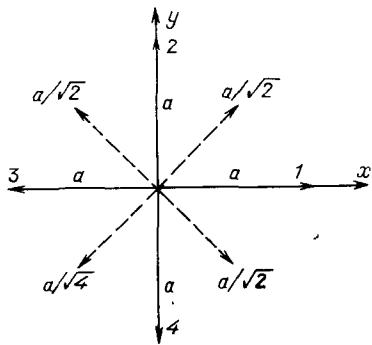


Рис. Р.9.4. Векторная диаграмма сигнала ДФМ

при больших значениях отношения сигнал-шум и оптимальном некогерентном приеме

$$p_{\text{ош.4}} \approx 1,5 \exp(-h^2/2).$$

Из таблицы состояний (см. табл. 9.1) для ДЧМ следует, что лишь в двух из трех случаев ошибочного решения о переданной частоте группового сигнала символы в индиви-

дуальных каналах будут зарегистрированы ошибочно. Поэтому вероятность ошибки в индивидуальном двоичном канале

$$p_{\text{ош}} = 2 p_{\text{ош.4}}/3 \approx \exp(-h^2/2).$$

9.2.19. Рассматривая рис. Р.9.4, можно заметить, что сигналы отдельных позиций ДФМ можно представить как результат суммирования двух независимых двоичных сигналов ФМ с амплитудами  $a\sqrt{2}$ , сдвинутых друг относительно друга на  $\pi/2$ . Средняя мощность этих сигналов в 2 раза меньше, чем у суммарного сигнала ДФМ. Следовательно, при оптимальном приеме в случае точно известных параметров сигнала вероятность ошибки в каждом двоичном канале  $p = 0,5[1 - \Phi(\sqrt{h^2})]$ .

Очевидно, что для системы ДОФМ  $p \approx 1 - \Phi(\sqrt{h^2})$ .

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГЛАВЫ 10

### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 10.1.

10.1.1. Из соотношения (10.2) следует, что частотная эффективность изменяется от 0 при  $F = \infty$  до  $\infty$  при  $F = 0$ . С учетом этого из соотношения (10.5) следует, что

$$\beta_{\text{макс}} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \beta = \lim_{\gamma \rightarrow 0} (\gamma/(2\gamma - 1)) = 1/\ln 2 = 1,443 \text{ (1,59 дБ)}.$$

10.1.2. Из (10.2) следует, что величина  $\gamma_{\text{макс}}$  достигается при  $R_{\text{макс}}$ , которая, в свою очередь, равна  $\log M/T$  ( $T$  — длительность элементарного символа). С учетом этого  $\gamma_{\text{макс}} = \log M/TF$ .

10.1.5. По графикам рис. 10.1 выигрыш по частотной и энергетической эффективности находим как разность соответствующих абсцисс ( $\Delta\gamma$ ) и ординат ( $\Delta\beta$ ). Для заданных условий  $\Delta\gamma = 5$  дБ,  $\Delta\beta = -6$  дБ.

10.1.6. Используя графики рис. 10.1 и соотношение (10.4), имеем: для  $AM_2$   $\eta = 0,23$ ; для  $ЧМ_2$   $\eta = 0,15$ ; для  $ФМ_2$   $\eta = 0,25$ .

10.1.7. Указание к решению. Использовать графики рис. 10.1.

10.1.8. Согласно формуле (10.6) с учетом (10.1) при  $R = \text{const}$

$$\mathcal{E}B_{i/j} = 10 \lg(h_{3i}^2/h_{3j}^2).$$

Принимая во внимание результат задачи 6.3.6, получаем,

$$\mathcal{E}B_{AM/ЧМ} = 10 \ln 2 = 3,03 \text{ дБ}; \quad \mathcal{E}B_{AM/ФМ} = 10 \lg 4 = 6,06 \text{ дБ}.$$

Очевидно, что полосы частот систем АМ и ФМ одинаковы, а полоса частот системы ЧМ вдвое превышает полосу частот систем АМ и ФМ. Поэтому  $\Delta\gamma_{AM/ФМ} = 0$  дБ;  $\Delta\gamma_{AM/ЧМ} = -3,03$  дБ;  $\Delta\gamma_{ЧМ/ФМ} = 3,03$  дБ.

10.1.9. Известно [14], что для  $m$ -позиционной системы

$$p_0 = 1 - (1 - p_{\text{ош.}m})^{1/\log_2 m}.$$

При

$$p_{\text{ош.}m} \ll 1 \quad p_0 \approx p_{\text{ош.}m}/\log_2 m.$$

Учитывая решение задачи 6.3.4, находим

$$p_0 \approx (m - 1) p_{\text{ош}}/\log_2 m.$$

Теперь можем записать

$$p_{0,10\text{ФМ}} = \frac{9}{\log_2 10} 0,5 [1 - \Phi(\sqrt{25})] = 8,15 \cdot 10^{-5};$$

$$p_{0,10\text{ЧМ}} = \frac{9}{\log_2 10} 0,5 [1 - \Phi(\sqrt{12,5})] = 6,32 \cdot 10^{-3}.$$

Выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки при переходе от системы ЧМ к системе ФМ в данном случае  $\delta_{ЧМ/ФМ} = 77,5$ .

10.1.11. Для двоичной системы ЧМ

$$h_{2,2\text{ЧМ}}^2 = h^2 = -2 \ln 2 p = 12,4 \text{ (при } p_0 = 10^{-3}\text{)}$$

Для 5-позиционной системы при  $p = p_0 = \text{const}$ ,  $R = \text{const}$

$$h_{2,5\text{ЧМ}}^2 = \frac{2}{\log_2 5} \ln \frac{2}{\log_2 5} = 5,82 \text{ (при } p_0 = 10^{-3}\text{)}.$$

Энергетический выигрыш согласно (10.6)

$$\mathcal{E}B_{2\text{ЧМ}/5\text{ЧМ}} = 3,28 \text{ дБ}.$$

Полагая, что многопозиционная система с ортогональными сигналами (ЧМ) создается путем использования отрезков гармонических сигналов с кратными величине  $2\pi/T$  частотами, можно считать, что полоса частот, занимаемая системой, пропорциональна числу позиций. В этом случае выигрыш по полосе согласно (10.8)

$$\Delta\gamma_{2\text{ЧМ}/5\text{ЧМ}} = -4 \text{ дБ}.$$

Полезно заметить, что переход от 2-позиционной к  $m$ -позиционной системе ЧМ сопровождается выигрышем по эквивалентному отношению сигнал-шум (коэффициент использования мощности передатчика повышается) и проигрышем по занимаемой полосе частот.

10.1.12. Согласно [12] коэффициент использования пропускной способности (10.3)

$$\eta = \log_2 m / (T_m C).$$

Величину  $C$  можно представить следующим образом:

$$C = F \log(1 + \rho) = F \log(1 + 2h^2/B),$$

так как  $\rho = P_c T / (N_0 F T) = 2h^2/B$ . Здесь  $B = 2FT$  — база сигнала.

Теперь для коэффициента использования пропускной способности можно записать

$$\eta = \frac{2 \log_2 m}{B \log_2(1 + 2h^2/B)}.$$

При заданной скорости передачи информации  $R$

$$\eta = \frac{R}{F \log_2(1 + R h_s^2) / (F \log m)}.$$

Величина

$$h_s^2 = \frac{m-1}{2 \log_2 m} \ln \left( \frac{m-1}{2p_0 \log_2 m} \right) = \frac{3}{2 \log_2 4} \ln \frac{3}{2 \cdot 10^{-4} \log_2 4} = 6,69.$$

Теперь находим

$$\eta = \frac{300}{3,1 \cdot 10^3 \log_2 \left( 1 + \frac{6,69 \cdot 300}{6,2 \cdot 10^3} \right)} = 1,33 \cdot 10^{-1}.$$

10.1.13. Вероятность того, что в  $(n-1)$  ветвях коэффициент передачи канала  $k < k_0$ , а в одной какой-либо ветви  $k = k_0$ , определяется формулой

$$\begin{aligned} \omega_1(k_0) dk_0 &= n \omega_1(k = k_0) \left[ \int_0^{k_0} \omega_1(k) dk \right]^{n-1} dk_0 = \\ &= \frac{nk_0}{k^2} \exp(-k_0^2/\bar{k}^2) [1 - \exp(-k_0^2/\bar{k}^2)]^{n-1} dk_0, \end{aligned}$$

где  $\omega_1(k) = \frac{2k}{k^2} \exp(-k^2/\bar{k}^2)$  — рэлеевское распределение коэффициента передачи канала (амплитуд).

Плотность вероятности для максимума коэффициента передачи канала  $k_{\max} = k_0$  получим, поделив  $\omega(k_0) dk_0$  на  $dk_0$ :

$$\omega(k_0) = (nk_0/\bar{k}^2) \exp(-k_0^2/\bar{k}^2) [1 - \exp(-k_0^2/\bar{k}^2)]^{n-1}.$$

Для двоичной ЧМ в отсутствие замираний и при оптимальном некогерентном приеме вероятность ошибки при  $k = k_0$

$$p_{\text{ош}}(k_0) = 0,5 \exp(-0,5 k_0^2 P_c T / N_0).$$

Рассматриваемая схема автовыбора эквивалентна схеме одностороннего приема, у которой коэффициент передачи меняется в соответ-

ствии с найденной статистикой  $\omega_1(k_0)$ . Следовательно, средняя вероятность ошибки при  $n$ -кратном разнесении

$$\begin{aligned} p_{\text{ош}, n} &= \int_0^{\infty} \rho(k_0) \omega(k_0) dk_0 = (n/2\bar{k}^2) \int_0^{\infty} k_0 \exp[-(k_0^2/\bar{k}^2)(1 + \\ &+ 0,5\bar{h}^2)] [1 - \exp(-k_0^2/\bar{k}^2)]^{n-1} dk_0, \end{aligned}$$

где  $\bar{h}^2 = \bar{k}^2 P_c T / N_0$  — отношение средней энергии посылки сигнала в месте приема к спектральной плотности мощности шума.

Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$p_{\text{ош}, n} = \frac{n!}{2 \prod_{i=1}^n (i + \bar{h}^2/2)}.$$

10.1.14. В области малых ошибок (при больших  $h^2$ ) из соотношения для  $p_{\text{ош}, n}$ , полученного в задаче 10.1.13, следует

$$\begin{aligned} p_{\text{ош}, 1} &\approx 1/\bar{h}_1^2; \quad p_{\text{ош}, 2} \approx 4/(\bar{h}_2^2)^2; \quad \bar{h}_1^2 \approx 1/p_{\text{ош}, 1}; \\ \bar{h}_2^2 &\approx 2/\sqrt{p_{\text{ош}, 2}}. \end{aligned}$$

При неизменной вероятности ошибки  $p_{\text{ош}, 1} = p_{\text{ош}, 2} = p_{\text{ош}} = 10^{-4}$  энергетический выигрыш двукратного приема по сравнению с односторонним

$$\Delta B_{1/2} = 10 \lg(\sqrt{p_{\text{ош}, 2}/2p_{\text{ош}, 1}}) = 17 \text{ дБ}.$$

10.1.16. Помехоустойчивость двоичной системы связи с ЧМ при флуктуационной помехе определяется отношением  $h^2 = E/N_0$ . Энергия составного сигнала

$$E = \int_0^T \left[ \sum_{k=1}^N U_m \sin(\omega_k t + \varphi_k) \right]^2 dt = \sum_{k=1}^N E_k,$$

где  $E_k = \int_0^T U_m^2 \sin^2(\omega_k t + \varphi_k) dt$  — энергия элемента составного сигнала. Поскольку энергии элементарных сигналов одинаковы, можно записать

$$h^2 = \sum_{k=1}^N E_k / N_0 = E / N_0.$$

Вероятность ошибки, равная в данном случае  $p_{\text{ош}} = 0,5 [1 - \Phi(\sqrt{h^2})]$ , не зависит от базы сигнала  $2FT$ .

Коэффициент использования полосы частот  $\gamma = R/F = 1/FT = 2/B$ . При  $T = 20$  мс и  $N = 2000$   $\tau_0 = 10^{-6}$ ,  $F = 1/\tau_0 = 10^6$  Гц и  $\gamma = 10^{-4}$  бит/Гц. Из этого можно сделать вывод, что широкополосные системы связи с составными сигналами используют полосу частот весьма неэффективно.

10.1.17. Можно считать, что при использовании сигналов с большой базой сосредоточенные помехи действуют так же, как флукту-

ационная помеха со спектральной плотностью, равной  $G_{с.п} = \Sigma P_{с.п}/F$ , где  $F$  — полоса сигнала;  $\Sigma P_{с.п}$  — суммарная мощность сосредоточенных помех в полосе сигнала.

Если в канале действует флуктуационная и сосредоточенные помехи со спектральными плотностями  $N_0$  и  $G_{с.п}$ , величина  $h^2$  может быть определена как

$$h^2 = E/(N_0 + G_{с.п}) = P_c T / [N_0 + (\Sigma P_{с.п})/F].$$

Если  $N_0 \ll G_{с.п}$ , то  $h^2 \approx P_c FT / \Sigma P_{с.п}$ . Этот результат свидетельствует об ослаблении влияния сосредоточенных помех с ростом базы сигнала.

10.1.18. Выигрыш ЭВ показывает, во сколько раз может быть уменьшена мощность передатчика при переходе от одного метода передачи к другому при сохранении качества передачи (средней вероятности ошибки  $\rho_{ош}$ ).

Средняя вероятность ошибки в двоичной системе модуляции является однозначной функцией величины  $h^2 = P_c T / N_0$  ( $P_c$  — средняя мощность сигнала в подканале,  $T$  — длительность элементарной посылки):

$$\rho_{ош} = 0,5 [1 - \Phi(\sqrt{nh^2})] \text{ при когерентном приеме,}$$

$$\rho_{ош} = 0,5 [\exp(-0,5nh^2)] \text{ при некогерентном приеме.}$$

При ЧМ  $n=1$ , при ФМ (ОФМ)  $n=2$ .

Таким образом, для сохранения качества связи (величины  $\rho_{ош}$ ) необходимо поддерживать постоянной величину  $h^2$ , т. е.  $P_c T = \text{const}$ .

В последовательной системе вся мощность передатчика  $P_0$  расходуется на один подканал:  $P_1 = P_0$ ,  $P_{\text{макс},1} = P_0$ .

В параллельной системе средняя мощность передатчика распределяется между подканалами  $P_2 = P_0/R$ ,  $P_{\text{макс},2} = P_0/n^\lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ). В последовательной системе длительность элементарной посылки  $T_1 = 1/R$  ( $R$  — скорость передачи информации). В параллельной системе  $T_2 = n/T = n/T_1$ . Следовательно,  $P_1 T_1 = P_0/R$ ,  $P_2 T_2 = P_0/R$  — т. е. при сохранении средней мощности передатчика (случай «а») выигрыш отсутствует ( $\text{ЭВ} = 1$ ).

При фиксированной же пиковой мощности передатчика (случай «б»)

$$P_1 T_1 = P_{\text{макс},1}/R, \quad P_2 T_2 = P_{\text{макс},2}/R n^\lambda$$

и выигрыш

$$\text{ЭВ} = P_{\text{макс},1} T_1 / P_{\text{макс},2} T_2 = n^{\lambda-1}.$$

10.1.20. Распределение коэффициента передачи канала в одном луче

$$\omega_1(k_1) = (2k_1/\bar{k}_1^2) \exp(-k_1^2/\bar{k}_1^2).$$

При когерентном приеме по одному лучу

$$\rho_{ош} = 0,5 [1 - \Phi(\sqrt{2k_1^2 P_c T / N_0})],$$

где  $P_c$  — мощность посылки;  $N_0$  — спектральная плотность мощности шума.

После усреднения полученного выражения по  $k_1$  с учетом выражения для  $\omega(k_1)$  при больших  $\bar{h}^2_1$  имеем [8]  $\rho \approx 0,25/\bar{h}^2_1$ .

При приеме по обоим лучам, если передача ведется по параллельным каналам,  $T_1 = n/R = 20/1200 \approx 16$  мс,  $T_{a1} = T_1 - \Delta t = 14$  мс и оба луча на протяжении  $T_{a1}$  сливаются в один также с рэлеевским распределением коэффициента передачи, но с вдвое большим средним квадратом:

$$\omega_1(k) = (k_1/\bar{k}_1^2) \exp(-k_1^2/2\bar{k}_1^2).$$

При этом  $\rho_{ош} \approx 0,125/\bar{h}^2_1$ .

Если передача ведется последовательным методом по одному каналу,  $T_2 = 1/R = 1/1200 = 0,833$  мс,  $T_{a2} = T_2 + \Delta t = 2,833$  мс, оба луча не сливаются в один, а дополняют друг друга.

При больших  $\bar{h}^2_1$  в этом случае  $\rho_{ош} \approx 0,187/(\bar{h}^2_1)^2$  [8]. Таким образом, для параллельной системы  $\bar{h}^2_1 \approx 0,125/\rho_{ош}$ ; для последовательной  $\bar{h}^2_1 \approx \sqrt{0,187/\rho_{ош}}$ .

Выигрыш перехода от параллельных систем к последовательным

$$\text{ЭВ} = (0,125/\rho_{ош})/\sqrt{0,187/\rho_{ош}} = 0,5/\sqrt{3\rho_{ош}}.$$

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 10.2.

10.2.1. Используя формулу для  $\eta$ , а также результаты задач § 7.2, найдем: для АМ  $g=0,2$ ,  $\eta=0,42$ ; для БМ  $g=2$ ,  $\eta=0,5$ ; для ОМ  $g=1$ ,  $\eta=1$ ; для ФМ  $g=222$ ,  $\eta=0,12$ ; для ЧМ  $g=666$ ,  $\eta=0,17$ .

10.2.6. В соответствии с решением задачи 7.2.10 имеем

$$g_{AM} = 2m^2/(m^2 + \Pi^2) = 0,02.$$

Согласно решению задачи 7.2.13

$$g_{FM} = F \beta_{FM}^2 / F_c \Pi^2 = 20 \cdot 100/9 = 222.$$

По формуле (10.11) получаем

$$\text{ЭВ}_{AM/ФМ} = 10 \lg(222/0,02) \approx 40 \text{ дБ.}$$

10.2.8. По формуле (10.11)

$$\text{ЭВ}_{ФМ/ЧМ} = 10 \lg(g_{ЧМ}/g_{ФМ}).$$

Воспользовавшись результатами задач 7.2.15 и 7.2.13, найдем

$$\text{ЭВ}_{ФМ/ЧМ} = 10 \lg(3F_{ЧМ}^3/F_{ФМ}^3).$$

Если полосы канальных сигналов одинаковы, то

$$\text{ЭВ}_{ФМ/ЧМ} = 10 \lg 3 = 4,7 \text{ дБ.}$$

10.2.9. Так как в системе без модуляции  $g=1$ , воспользовавшись результатом решения задачи 7.2.10, получаем по (10.11)  $\text{ЭВ} = -14$  дБ.

Таблица Р.10.1

$N_1$	0,1	0,5	0,8	0,9	0,99
$N_2$	0,20	0,75	0,96	0,99	0,9999
$N_2/N_1$	2	1,5	1,2	1,1	1,01

Таблица Р.10.2

Система	Значение $\eta$	
	при $\rho_{\text{вых}} = 1000$	при $\rho_{\text{вых}} = 5000$
АМ	0,34	0,34
БМ	0,56	0,54
ОМ	1,0	1,0
ФМ	0,41	0,21
ФИМ—ОМ	0,29	0,18

10.2.10. Указание к решению. Воспользоваться решением задачи 7.2.11.

10.2.11. Указание к решению. Воспользоваться решением задачи 7.2.12.

10.2.12. Указание к решению. Воспользоваться решением задачи 7.2.13.

10.2.13. Указание к решению. Воспользоваться решением задачи 7.2.18.

10.2.14. Указание к решению. Воспользоваться решением задачи 7.2.17.

10.2.16. Ненадежность в отдельном параллельном канале  $1-N_1$ , где  $N_1$  — надежность канала.

При приеме сигналов по  $n$  независимым каналам ненадежность связи  $1-N_n$  будет определяться вероятностью того, что одновременно во всех каналах  $\rho_{\text{вых}} < \rho_{\text{пор}}$ , т. е. с учетом однородности статистики в отдельных каналах  $1-N_n = (1-N_1)^n$  или надежность связи при  $n$ -канальном приеме  $N_n = 1 - (1-N_1)^n$ . Интересующие нас сведения сведены в табл. Р.10.1, из которой видно, что эффективность параллельной передачи падает по мере улучшения качества (надежности) работы одноканальной системы. Видно также, что эффективность разнесенного приема падает по мере увеличения числа ветвей разнесения.

10.2.18. Полагая  $\rho_{\text{вх}} = \rho_{\text{вых}}/g$ , имеем расчетную формулу

$$\eta = \frac{F_c}{F} \frac{\log(1 + \rho_{\text{вых}})}{\log(1 + \rho_{\text{вых}}/g)}$$

Значения  $\eta$  сведены в табл. Р.10.2, из которой видно, что среди сравниваемых систем наибольшее значение эффективности (коэффициента использования пропускной способности канала) имеет система ОМ.

#### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 10.3.

10.3.1. В системе с согласованными фильтрами при использовании ортогональных в усиленном смысле реализаций отдельных сигналов (для возможности приема в условиях неопределенной фазы сигнала) можно выбрать минимальный разнос между час-

тотами  $\Delta f = 1/T = 50$  Гц. Поэтому в полосе  $F_{\Sigma} = 3100$  Гц можно разместить до  $3100/50 = 62$  реализаций, или до 31 двоичного канала.

10.3.4. Найдем сначала энергетическую цену разделения для системы А. Индекс частотной модуляции  $\beta_{\text{ЧМ}} = \Delta f_{\Sigma}/F_{\Sigma} = \Delta f_1/nF_1$ , где  $\Delta f_1$  — девиация частоты при одноканальном режиме;  $F_1$  — занимаемая одним каналом полоса частот. Если мощность сигнала на входе приемника остается неизменной, то отношение мощности группового сигнала на выходе частотного детектора  $P_{\Sigma \text{ вых}}$  к спектральной плотности мощности шума  $G_{0 \text{ вых}}$  пропорционально  $\beta^2_{\text{ЧМ}}$  и обратно пропорционально  $n^2$ . Если среднюю мощность передатчика увеличить в  $n^2$  раз, то отношение  $P_{\Sigma \text{ вых}}/G_{0 \text{ вых}}$  останется неизменным. Но по определению энергетической цены разделения должно оставаться неизменным отношение  $P_{1 \text{ вых}}/G_{0 \text{ вых}}$  средней мощности канального сигнала на выходе приемника к спектральной плотности мощности шума. При статистической независимости сигналов отдельных каналов  $P_{1 \text{ вых}} = P_{\Sigma}/n$ . Поэтому энергетическая цена разделения системы А  $\xi_F = n^3$ . Поскольку в системе А рост числа каналов не сопровождается расширением полосы частот (так как девиация не меняется), то спектральная цена разделения  $\xi_F(A) = 1$ .

В системе Б будем считать, что девиация частоты меняется пропорционально числу каналов  $n$ , но тогда  $(P_{\Sigma}/G_{0 \text{ вых}})$  и вместе с тем и  $\beta_{\text{ЧМ}}$  не зависит от  $n$ . Следовательно, для того чтобы сохранить неизменным  $(P_1/G_{0 \text{ вых}})$  (качество связи), достаточно увеличить среднюю мощность передатчика в многоканальном варианте в  $n$  раз:  $\xi_F = n$ . Спектральная цена системы Б  $\xi_F(B) = n$ .

Согласно (10.17) энергетический выигрыш перехода от системы А к системе Б  $\text{ЭВ}_{А/Б} = 10 \lg n^2$ , что достигается проигрышем в эффективности использования полосы частот в  $\xi_F(B)/\xi_F(A) = n$  раз.

10.3.5. При использовании синхронного детектора в системе фазового разделения отношение сигнал-шум на выходе

$$\rho_{\text{вых}} = 0,25 P_{\text{макс}} / (N_0 F_c \Pi^2_1)$$

Для системы частотного разделения (при синхронном детектировании)

$$\rho_{\text{вых}} = 0,5 P_{\text{макс}} / (N_0 F_c \Pi^2_1 n^2)$$

Отсюда получаем

$$\text{ЭВ}_{А/Б} = 2^{x+1}/4 = 2^{x-1}$$

В системе фазового разделения полоса группового сигнала равна  $2F_c$ . В системе частотного разделения полоса группового сигнала при разносе между канальными частотами  $2F_c$  равна  $4F_c$ .

Спектральный проигрыш при переходе от системы фазового разделения к системе частотного разделения равен 2.

10.3.7. Очевидно, что пиковая мощность сигнала в системе ДЧМ равна пиковой мощности передатчика  $P_{\text{макс}}$  и  $h^2_{\text{ДЧМ}} = P_{\text{макс}} T / N_0$ .

В двухканальной системе ЧМ пиковая мощность индивидуально-го сигнала  $P_{\max,1} = P_{\max}/2^x$ . При строго линейном режиме передатчика ( $x=2$ )

$$P_{\max,1} = 0,25 P_{\max} \quad \text{и} \quad h_{2\text{ЧМ}}^2 = h_{\text{ДЧМ}}^2/4.$$

Следовательно, в этом случае  $\Delta B_{2\text{ЧМ}/\text{ДЧМ}} = 6$  дБ. Если допустить нелинейность в передатчике ( $x=1$ ), то  $\Delta B_{2\text{ЧМ}/\text{ДЧМ}} = 3$  дБ. Поскольку двухканальная система ЧМ занимает примерно ту же полосу частот, что и система ДЧМ, коэффициент эффективности использования полосы при одинаковых объемах передаваемой информации будет одинаков для этих систем.

10.3.8. Согласно (10.17) для систем, отличающихся только способом разделения, энергетический выигрыш перехода от одной системы к другой

$$\Delta B_{i/j} = 10 \lg [\xi_P(n)_i / \xi_P(n)_j],$$

где  $\xi_P(n)_i$  — энергетическая цена разделения  $i$ -й системы. Для системы ДОФМ  $\xi_P(2) = 2$ . Легко убедиться, что для двухканальной системы временного разделения  $\xi_P(2) = 2$ , так как сокращение длительности посылки в 2 раза требует увеличения мощности передатчика в 2 раза для сохранения неизменной верности. При частотном разделении средняя мощность сигнала одного канала уменьшается в 2 раза (для двухканальной системы) и  $\xi_P(2) = 2$ . Следовательно,  $\Delta B_{i/j} = 0$  дБ. Выигрыш по эффективности использования полосы частот при переходе от двухканальной системы частотного или временного разделения к системе ДОФМ равен 2, так как полоса ДОФМ такая же, как и у одноканальной системы ФМ, а у систем частотного и временного разделения она в 2 раза больше.

10.3.9. Пропускную способность  $n$ -канальной системы в рассматриваемом канале определим по формуле

$$C_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n C_k = \sum_{k=1}^n F_k \log \left[ 1 + \frac{P_{c k}}{N_0 F_k + \lambda (n-1) P_{c k}} \right].$$

Средняя мощность в отдельном канале  $n$ -канальной системы

$$P_{c k} = P_{\max} / n \Pi^2(n) = P_{\max} / n^x \Pi_1^2.$$

С учетом этого для пропускной способности  $n$ -канальной системы частотного разделения получаем

$$C_{\Sigma} = n F_k \log \left[ 1 + \frac{P_{\max}}{n^x \Pi_1^2 [F_k N_0 + \lambda (n-1) P_{\max} / n^x \Pi_1^2]} \right].$$

Если  $\lambda(n-1)P_{c k} \ll N_0 F_k$  (переходной помехой можно пренебречь), то при строго линейном режиме передатчика ( $x=2$ )

$$C_{\Sigma} = n F_k \log \left[ 1 + \frac{P_{\max}}{n^2 \Pi_1^2 N_0 F_k} \right] = 4,8 \cdot 10^5 \text{ бит/с.}$$

Если  $\lambda(n-1)P_{c k} \gg N_0 F_k$ , то в указанных условиях

$$C_{\Sigma} = n F_k \log [1 + 1/\lambda (n-1)]$$

(это соответствует значению коэффициента  $\lambda \gg N_0 F_k / [P_{c k} (n-1)] \approx 10^{-3}$ ).

Например, при  $\lambda = 10^{-1}$   $C_{\Sigma} = 9,4 \cdot 10^3$  бит/с.

10.3.10. Пропускная способность 20-канальной системы временного разделения

$$C_{\Sigma} = 20 F_k \log \left[ 1 + \frac{P_{\max}}{\Pi_1^2 [N_0 20 F_k + \lambda (n-1) P_{\max} / \Pi_1^2]} \right].$$

Если пренебречь переходной помехой, то

$$C_{\Sigma} = 20 F_k \log [1 + P_{\max} / (\Pi_1^2 20 F_k N_0)] = 1,6 \cdot 10^6 \text{ бит/с,}$$

что в 30 раз больше, чем при частотном разделении. При переходной помехе, существенно превышающей флуктуационный шум в канале, пропускная способность этих двух систем одинакова.

10.3.11. Найдем пропускную способность системы передачи 20 независимых сообщений, каждое из которых занимает полосу  $F_c = 4000$  Гц, при отношении сигнал-шум на выходе канала, равном 7:

$$C_c = 20 F_c \log [1 + \rho_{\text{вых}}] = 2,4 \cdot 10^5 \text{ бит/с.}$$

Коэффициент эффективности системы при использовании канала с частотным разделением (задача 10.3.9)

$$\eta = C_c / C_{\Sigma} = 0,5.$$

При использовании канала с временным разделением (задача 10.3.12)

$$\eta = C_c / C_{\Sigma} = 0,15.$$

10.3.12. В данном случае пропускная способность системы

$$C_c = n H' = 8 \cdot 10^4 \text{ бит/с.}$$

Коэффициент эффективности системы, использующий канал с частотным разделением (задача 10.3.9),  $\eta = 0,167$ . Коэффициент эффективности системы, использующей канал с временным разделением (задача 10.3.10),  $\eta = 0,05$ .

#### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 10.4.

10.4.1. При декодировании с исправлением ошибок по минимуму расстояния по Хеммингу кодовая комбинация будет принята с ошибкой, если в ней искажено более чем  $[n/2]$  кодовых символов ( $[n/2]$  — целая часть от  $n/2$ ). Следовательно, вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации данного кода

$$p_k = \sum_{t=[n/2]+1}^n C_n^t p_0^t (1-p_0)^{n-t}.$$



Эквивалентная вероятность ошибки согласно (10.21)  $p_э = 1 - (1 - p_к)^{1/k}$ . Так как в данном случае число информационных символов  $k=1$ ,

$$p_э = p_к = \sum_{i=[n/2]+1}^n C_n^i p_0^i (1-p_0)^{n-i}.$$

10.4.4. Воспользовавшись соотношениями для  $P_э(7,4)$  и  $P_э(n,n)$ , найденными в предыдущей задаче, определяем при  $P_э = \text{const}$

$$h^2_{э(7,4)} = 1,75 \ln(1,31/p_э); \quad h^2_{э(n,n)} = 2 \ln(0,5/p_э).$$

Отсюда согласно (10.24)

$$\mathcal{E}B_{(n,n)/(7,4)} = 10 \lg \frac{8 \ln(0,5/p_э)}{7 (\ln 2,62 + \ln(0,5/p_э))}.$$

При

$p_э = 10^{-2}$	$\mathcal{E}B_{(n,n)/(7,4)} = -0,045$ дБ;
$p_э = 10^{-3}$	$\mathcal{E}B_{(n,n)/(7,4)} = -0,37$ дБ;
$p_э = 10^{-4}$	$\mathcal{E}B_{(n,n)/(7,4)} = 0,11$ дБ;
$p_э = 10^{-5}$	$\mathcal{E}B_{(n,n)/(7,4)} = 0,21$ дБ;
$p_э = 10^{-6}$	$\mathcal{E}B_{(n,n)/(7,4)} = 0,27$ дБ.

10.4.5. Коэффициент передачи канала с медленными рэлеевскими замираниями имеет плотность вероятности

$$\omega_1(k) = (2k/\bar{k}^2) \exp(-k^2/\bar{k}^2).$$

Эквивалентную вероятность ошибки для кода  $(n,n)$  и кода  $(7,4)$  находим, усредняя по всем значениям выражения, полученные в задаче 10.4.3 с учетом (10.22):

$$p_э(7,4) = 1,31 \int_0^{\infty} \exp(-4k^2 P_c / (7N_0 R)) \omega_1(k) dk = 1,31 / (1 + 0,57 \bar{h}^2_э),$$

$$p_э(n,n) = 0,5 \int_0^{\infty} \exp(-0,5k^2 P_c / (N_0 R)) \omega_1(k) dk = 1 / (2 + h^2_э),$$

где  $\bar{h}^2_э = \bar{k}^2 P_c / (N_0 R)$  — среднее значение  $h^2_э$ .

Выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки в данном случае

$$\delta_{(n,n)/(7,4)} = [1 + 4\bar{h}^2_э/7] / 1,31 (2 + \bar{h}^2_э).$$

При

$p_0 = p_э(n,n) = 10^{-2}$	$\bar{h}^2_э = 98$	$\delta_{(n,n)/(7,4)} = 0,4;$
$p_0 = p_э(n,n) = 10^{-3}$	$\bar{h}^2_э = 998$	$\delta_{(n,n)/(7,4)} = 0,4;$
$p_0 = p_э(n,n) = 10^{-4}$	$\bar{h}^2_э = 10^4$	$\delta_{(n,n)/(7,4)} = 0,4;$
$p_0 = p_э(n,n) = 10^{-5}$	$\bar{h}^2_э = 10^5$	$\delta_{(n,n)/(7,4)} = 0,4;$
$p_0 = p_э(n,n) = 10^{-6}$	$\bar{h}^2_э = 10^6$	$\delta_{(n,n)/(7,4)} = 0,4.$

10.4.7. При быстрых замираниях коэффициент передачи канала случайно меняется от одной посылки к другой. В этом случае средняя вероятность ошибки элементарного символа с учетом (10.22)

$$p_0 = 0,5 \int_0^{\infty} \exp(-h^2/2) \omega_1(k) dk = 1 / (2 + k \bar{h}^2_э/n).$$

Следовательно, для кода  $(7,4)$

$$p_э(7,4) = 5,25 / (2 + 0,57 \bar{h}^2_э)^2.$$

Для кода  $(n,n)$   $p_э(n,n) = 1 / (2 + \bar{h}^2_э)$  и

$$\delta_{(n,n)/(7,4)} = (2 + 0,57 \bar{h}^2_э)^2 / 5,25 (2 + \bar{h}^2_э).$$

При

$p_э(n,n) = 10^{-4}$	$\bar{h}^2_э = 10^4$	$\delta_{(n,n)/(7,4)} = 622;$
$p_э(n,n) = 10^{-2}$	$\bar{h}^2_э = 98$	$\delta_{(n,n)/(7,4)} = 6,4;$
$p_э(n,n) = 10^{-3}$	$\bar{h}^2_э = 998$	$\delta_{(n,n)/(7,4)} = 61,9;$
$p_э(n,n) = 10^{-5}$	$\bar{h}^2_э = 10^5$	$\delta_{(n,n)/(7,4)} = 62200;$
$p_э(n,n) = 10^{-6}$	$\bar{h}^2_э = 10^6$	$\delta_{(n,n)/(7,4)} = 62200.$

10.4.9. Согласно решению задачи 10.4.2 при поэлементном приеме

$$p_э(n,n) = 0,75 \exp(-h^2_э/3); \quad h^2_э = 3h^2.$$

При приеме в целом можно считать, что длительность сигналов, ортогональных в усиленном смысле, равна  $3T$ . В этом случае вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации

$$p_к = 0,5 \exp(-3h^2/2);$$

$$p_э(n,n) = p_к = 0,5 \exp(-h^2_э/2).$$

Выигрыш по вероятности ошибки

$$\delta_{(n,n)/(n,n)} = 0,75 \exp(-h^2_э/3) / 0,5 \exp(-h^2_э/2) = 1,5 \exp(h^2_э/6).$$

Энергетический выигрыш

$$\mathcal{E}B_{(n,n)/(n,n)} = 10 \lg [1,5 \ln(0,75 p_э) / \ln(0,5 p_э)].$$

При  $p_э \ll 1$   $\mathcal{E}B_{(n,n)/(n,n)} \approx 10 \lg 1,5 = 1,76$  дБ.

10.4.10. При  $p_0 \ll 1$  эквивалентная вероятность ошибки кода  $(n, k)$ , исправляющего все ошибки кратности  $q_n$  и не исправляющего ошибок кратности  $q_n + 1$  [14],

$$p_э = n p_0^{q_n + 1} / k.$$

При когерентном приеме ЧМ  $p_0 = 0,5 [1 - \Phi(\sqrt{h^2})]$ . В случае использования примитивного кода при той же скорости передачи информации  $p_0 = 0,5 [1 - \Phi(\sqrt{nh^2/k})]$ , так как длительность эле-

мента сигнала, а также и энергия его увеличиваются в  $n/k$  раз. Используя асимптотическую формулу  $0,5[-\Phi(x)] = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}x$ , находим

$$\lim_{h^2 \rightarrow \infty} (p_3/p_0) = (n/k) \exp\{1/(1-\kappa_k) - q_n - 1\} h^2/2 / \sqrt{1-\kappa_k} (\sqrt{2\pi})^{q_n} h^{q_n+1}.$$

Здесь  $\kappa_k = 1 - k/n$  — избыточность кода. Если  $1/(1-\kappa_k) > q_n + 1$ , то  $\lim_{h^2 \rightarrow \infty} (p_3/p_0) = \infty$ , т. е.  $p_3 > p_0$ , и код  $(n, k)$  применять нецелесообразно. Если  $1/(1-\kappa_k) < q_n + 1$ , то  $\lim_{h^2 \rightarrow \infty} (p_3/p_0) = 0$  и при неко-

торых  $h^2 p_3 < p'_0$ . Следовательно, корректирующий код  $(n, k)$  целесообразно применять при условии

$$q_n \geq \kappa_k / (1 - \kappa_k).$$

10.4.14. Согласно графикам рис. 10.4 с ростом объема ансамбля  $M$  при фиксированном  $n$  ( $n=2$ ) в системах ФМ и АФМ растет частотная эффективность  $\gamma$  и уменьшается энергетическая эффективность  $\beta$ .

10.4.15. Ортогональные, биортогональные и симплексные сигналы образуют класс «разнесенных» сигналов, у которых с ростом  $M$  увеличивается расстояние между сигналами, что приводит к росту энергетической эффективности  $\beta$ . Ценой увеличения  $\beta$  является снижение частотной эффективности (см. рис. 10.4).

10.4.19. Как следует из анализа диаграмм рис. 10.4, в непрерывном постоянном канале при  $p=10^{-5}$  предельный энергетический выигрыш  $\Delta\beta$  в системах с кодированием по сравнению с ФМ<sub>2</sub> без кодирования составляет примерно 10 дБ. Так как применение современной элементной базы существенно снизило затраты на реализацию кодеров и декодеров, а стоимость энергетики канала осталась практически неизменной, плата за выигрыш  $\Delta\beta$  при кодировании оказывается существенно меньше платы за тот же выигрыш, полученный за счет увеличения энергетики канала (мощности сигнала или размеров антенн).

## ОТВЕТЫ

### Ответы к задачам главы 1

1.1.2. Для варианта 1:  $a_{11}a_{02}a_{23}$ ;  $a_{11}a_{12}a_{23}$ ;  $a_{11}a_{22}a_{23}$ ;  $a_{11}a_{32}a_{23}$ ;  $a_{11}a_{42}a_{23}$ ;  $a_{11}a_{52}a_{23}$ ;  $a_{11}a_{62}a_{23}$ ;  $a_{11}a_{72}a_{23}$ .

1.1.4. 1)  $2^5$ ; 2)  $2^8$ ; 3)  $2^6$ ; 4)  $2^{15}$ ; 5)  $2^9$ ; 6)  $2^{13}$ ; 7)  $2^{11}$ ; 8)  $2^{10}$ ; 9)  $2^{12}$ ; 10)  $2^{17}$ ; 11)  $2^{14}$ ; 12)  $2^{19}$ ; 13)  $2^{21}$ ; 14)  $2^{20}$ ; 15)  $2^{25}$ .

1.1.7. Для варианта 1:  $\Delta = 0,4^\circ$ ,  $K = 46$ ,  $N = 8^{46}$ .

1.1.9. Число точек изображения в кадре  $n = 520625$ ; число возможных кадров  $N = 17^{520625}$ .

1.1.10.  $N = 1024^{520000}$ .

1.1.13. 1)  $100^{32}$ ; 2)  $100^{25}$ ; 3)  $150^{24}$ ; 4)  $50^{12}$ ; 5)  $200^{72}$ ; 6)  $200^{180}$ ; 7)  $100^{180}$ ; 8)  $50^{16}$ ; 9)  $300^4$ ; 10)  $50^{72}$ ; 11)  $50^{90}$ ; 12)  $100^6$ .

1.1.15. Для варианта 1:  $V_1/V_2 = 3,7$ .

1.1.18. 1) 0,43 мВт; 2) 0,35 мВт; 3) 0,7 мВт; 4) 2,9 мВт; 5) 1,35 мВт; 6) 0,23 мВт; 7) 2 мВт; 8) 0,1 мВт; 9) 0,17 мВт; 10) 3,6 мкВт; 11) 0,71 мВт; 12) 0,33 мВт.

1.1.20. 1) 0,74; 2) 0,89; 3) 0,1; 4) 0,13; 5) 0,07; 6) 0,16; 7) 0,1; 8) 0,25; 9) 0,37; 10) 0,18; 11) 0,28; 12) 0,44.

1.1.23. 1)  $3,7 \cdot 10^7$ ; 2)  $1,35 \cdot 10^7$ ; 3)  $1,49 \cdot 10^7$ ; 4)  $7,7 \cdot 10^7$ ; 5)  $1,4 \cdot 10^7$ ; 6)  $1,03 \cdot 10^7$ ; 7)  $2 \cdot 10^7$ ; 8)  $4,3 \cdot 10^7$ ; 9)  $8,43 \cdot 10^7$ ; 10)  $9,9 \cdot 10^6$ ; 11)  $5,1 \cdot 10^7$ ; 12)  $2,7 \cdot 10^7$ .

1.2.2.  $n = 5$ ; 2; 1.

1.2.3.  $n_{\text{мин}} = 4$ ;  $b_1 = 0000$ ;  $b_2 = 0001$ ;  $b_3 = 0010$ ;  $b_4 = 0011$ ;  $b_5 = 0100$ ;  $b_6 = 0101$ ;  $b_7 = 0110$ ;  $b_8 = 0111$ ;  $b_9 = 1000$ ;  $b_{10} = 1001$ .

Код является избыточным, так как число комбинаций  $N = 2^4 = 16$ .

1.2.4.  $n = 7$ .

1.2.5. Для двоичного кода  $n = 4$ ; 7; 6; 4; 9. Для восьмеричного кода  $n = 2$ ; 3; 2; 3.

1.2.6. 101; 111; 1111; 100000; 111111; 10000000; 10000001.

1.2.7. Для двоичного кода при  $K = 8$ ; 32; 256. Для троичного кода при  $K = 9$ .

1.2.10.  $v = 200$  Бод.

1.2.11.  $T = 20$  мс; 10 мс; 5 мс.

1.2.12. 1) МОСКВА; 2) СЕКАМ; 3) МАСКА.

1.3.2. 1) 1,26 МГц; 2) 1,63 МГц; 3) 5,54 МГц; 4) 8,2 МГц; 5) 9,66 МГц; 6) 2,95 МГц; 7) 1,94 МГц; 8) 4,944 МГц; 10) 2,28 МГц; 11) 2,54 МГц; 12) 1,46 МГц.

1.3.4. 1) 218 кГц; 2) 360 кГц; 3) 478 кГц; 4) 360 кГц; 5) 392 кГц; 6) 520 кГц; 7) 428 кГц; 8) 488 кГц; 9) 432 кГц; 10) 338 кГц; 11) 336 кГц; 12) 420 кГц;

$$1.3.6. u_{\text{ЧМ}}(t) = U_{m2} \cos \left\{ \omega_2(t) + k_{\text{ЧМ}2} \int_0^t U_{m1} \cos \left[ \omega_1 t + k_{\text{ЧМ}1} \int_0^t b(t_1) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times dt_1 + \varphi_1 \right] dt_2 + \varphi_2 \right\}; \Delta f = 8,4 \text{ МГц.}$$

1.3.7. 1) 1,53 МГц; 2) 2,52 МГц; 3) 3,82 МГц; 4) 3,24 МГц; 5) 3,52 МГц; 6) 5,2 МГц; 7) 3,85 МГц; 8) 2,28 МГц; 9) 3,64 МГц; 10) 3,04 МГц; 11) 3,02 МГц; 12) 3,36 МГц.

1.3.13. 1) 600 кГц; 2) 1,5 МГц; 3) 300 кГц; 4) 375 кГц; 5) 150 кГц; 6) 75 кГц; 7) 33 кГц; 8) 50 кГц; 9) 100 кГц; 10) 42,8 кГц; 11) 500 кГц; 12) 750 кГц.

2.1.6. В четыре раза.

2.1.9.  $\omega_1(n_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2(t)}} \exp\left(-\frac{n_1^2}{2\sigma_1^2(t)}\right)$ ;  $\omega_1(n_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2(t)}} \times$   
 $\times \exp\left(-\frac{n_2^2}{2\sigma_2^2(t)}\right)$ . При  $R(\tau) = 0$   $\omega_2(n_1, n_2, \tau) = \omega_1(n_1)\omega_1(n_2)$ , что  
 доказывает независимость двух сечений случайного процесса.

$$2.1.10. \omega_2(z_1, z_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2(t_1)\sigma^2(t_2)[1-R^2(\tau)]}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2[1-R^2(\tau)]} \left[ \frac{[z_1(t_1) - u(t_1)]^2}{2\sigma^2(t_1)} - \frac{2R(\tau)z_1(t_1)z_2(t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{[z_2(t_2) - u(t_2)]^2}{2\sigma^2(t_2)} \right] \right\}.$$

$$2.1.11. \text{ При } R(\tau) = 0 \quad \omega(n_2/n_1) = \omega_1(n_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp(-n_2^2/2\sigma_2^2).$$

$$\text{ При } R(\tau) = \pm 1 \quad \omega(n_2/n_1) = \delta(n_2 - n_1 R(\tau) \sigma_1/\sigma_2).$$

$$2.1.12. \omega_3(n_1, n_2, n_3; \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2[1-R^2(\tau_1)][1-R^2(\tau_2)]}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{n_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_2^2[1-R^2(\tau_1)]} (n_2 - n_1 R(\tau_1) \sigma_1/\sigma_2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\sigma_3^2[1-R^2(\tau_2)]} (n_3 - n_2 R(\tau_2) \sigma_2/\sigma_3) \right\}.$$

$$2.1.13. \bar{x} = 0; \bar{x^2} = 1,2.$$

$$2.1.15. \overline{z(t)} = m_x \cos \omega_0 t + m_y \sin \omega_0 t; \quad \sigma^2 z(t) = \sigma^2 x(t) \cos^2 \omega_0 t +$$

$$+ \sigma^2 y \sin^2 \omega_0 t; \quad B_s(t_1, t_2) = 0,5 B_x(\tau) [\cos \omega_0 t (t_2 - t_1) + \cos \omega_0 (t_1 + t_2)] +$$

$$+ 0,5 B_y(\tau) [\cos \omega_0 (t_2 - t_1) - \cos \omega_0 (t_1 + t_2)].$$

2.1.19. 1) 100 с; 460 с; 2) 10 с; 16,1 с; 3) 50 с; 115 с; 4) 25 с;  
 321 с; 5) 12,5 с; 23,7 с; 6) 16,7 с; 50 с; 7) 16,7 с; 28 с; 8) 50 с; 39 с;  
 9) 12,5 с; 50,5 с; 10) 12,5 с; 36 с; 11) 12,5 с; 126 с; 12) 50 с; 391 с.

$$2.1.21. B_x(t_1, t_2) = 0,5 N_0 \delta(t_2 - t_1).$$

$$2.1.22. \text{ По методу эквивалентного прямоугольника } \tau_k = \sqrt{0,5\pi/\beta} =$$

$$= 125 \text{ с.}$$

$$\text{ Из условия } B(\tau_k) = 0,1 B(0) \quad \tau_k = \sqrt{-\ln 0,1/\beta^2} = 151 \text{ с.}$$

$$2.2.3. B(\tau) = N_0 \sin 2\pi F\tau / (2\pi F\tau); \quad \tau_k = 0,5/F; \quad F_3 = F.$$

$$2.2.4. F_3 = \beta/4; \quad \tau_k F_3 = 1/4.$$

$$2.2.5. G(\omega) = B(0) (\sqrt{\pi}/\beta) \exp(-\omega^2/4\beta^2); \quad F_3 = \beta\sqrt{\pi}.$$

$$2.2.7. \dot{G}_{AM}^*(\omega)_0 = 0,5 U_m^2 \delta(\omega - \omega_0) + 0,5 k_{AM}^2 G_x(\omega - \omega_0).$$

$$2.2.10. \dot{B}_{AM}^*(\tau) = 0,5 U_m^2 (1 - |\tau|/T) \cos \omega_0 \tau + 0,5 U_m^2 \cos \omega_0 \tau;$$

$$G_{AM}(\omega)_0 = 0,5 U_m^2 \delta(\omega - \omega_0) + 0,5 U_m^2 T \sin^2[(\omega - \omega_0) T/2] / [(\omega - \omega_0) T/2]^2.$$

$$2.2.11. \dot{B}_{ЧМ}^*(\tau) = 0,5 U_m^2 \cos \omega_1 \tau + 0,5 U_m^2 \cos \omega_2 \tau +$$

$$+ 0,5 U_m^2 (1 - |\tau|/T) \cos \omega_1 \tau + 0,5 U_m^2 (1 - |\tau|/T) \cos \omega_2 \tau;$$

$$G_{ЧМ}(f)_0 = 0,5 U_m^2 \delta(\omega - \omega_1) + 0,5 U_m^2 \delta(\omega - \omega_2) + 0,5 U_m^2 T \times$$

$$\times \sin^2[(\omega - \omega_1) T/2] / [(\omega - \omega_1) T/2]^2 + 0,5 U_m^2 T \sin^2[(\omega - \omega_2) T/2] /$$

$$[(\omega - \omega_2) T/2]^2.$$

$$2.3.4. x(t) = U_m (1 + m \cos \Omega t) \cos \varphi_0; \quad y(t) = U_m (1 + m \cos \Omega t) \sin \varphi_0.$$

$$2.3.5. 1) r(t) = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 U_2 \cos \Omega t}; \quad \varphi(t) = \arctg(U_2 \sin \Omega t /$$

$$(U_1 + U_2 \cos \Omega t)); \quad \Omega = \omega_2 - \omega_1; 2) r(t) = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 U_2 \cos 2\Omega t};$$

$$\varphi(t) = \arctg[(U_2 - U_1) \tg \Omega t / (U_2 + U_1)]; \quad \Omega = 0,5(\omega_2 - \omega_1).$$

$$2.3.6. r(t) = U_m; \quad \varphi(t) = \Omega t.$$

$$2.3.13. p = 1 - 0,5/n; \quad \text{при } n = 2 \quad p = 0,75.$$

$$2.3.17. M[u_{нч}] = k\sigma\sqrt{\pi/2} [1 + U_m^2/2\sigma^2] I_0(U_m^2/4\sigma^2) +$$

$$+ U_m^2 I_1(U_m^2/4\sigma^2) / 2\sigma^2 \exp(-U_m^2/4\sigma^2); \quad D[u_{нч}] = 2k^2\sigma^2 + k^2 U_m^2 -$$

$$- M^2[u_{нч}].$$

2.4.2 1) 15,7; 2) 20,8; 3) 6,7; 4) 15,6; 5) 14,8; 6) 16,4; 7) 14,6;  
 8) 17,4; 9) 14; 10) 15,6; 11) 6,7; 12) 18,6.

$$2.4.4. s_{11} = a_1; \quad s_{12} = b_1; \quad s_{13} = 0; \quad s_{14} = a_3; \quad s_{15} = 0; \quad s_{21} = a_1; \quad s_{22} = 0; \quad s_{23} =$$

$$= b_2; \quad s_{24} = 0; \quad s_{25} = b_3; \quad d(s_1, s_2) = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2}.$$

$$2.4.8. x_1 = a_1/\sqrt{2}; \quad x_2 = a_2/\sqrt{2}; \quad x_3 = a_3/\sqrt{2}; \quad x_4 = b_1/\sqrt{2}; \quad x_5 = b_2/\sqrt{2}$$

$$x_6 = b_3/\sqrt{2}; \quad \|s\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

$$2.4.10. (s_1 s_2) = a_1 a_2 \sin \Delta\omega T / 2\Delta\omega T \quad \text{при } (\omega_1 + \omega_2) \gg (\omega_1 - \omega_2) = \Delta\omega;$$

$$a_1/\sqrt{2} = \|s_1\|; \quad \|s_2\| = a_2/\sqrt{2}.$$

2.4.15. Сигналы АФМ образуют круговую сеть, изображенную  
 на рис. О.2.1:  $d(s_1, s_4) = d(s_2, s_4) = d(s_3, s_4) = \sqrt{2E}.$

$$d(s_1, s_3) = d(s_1, s_2) = d(s_2, s_3) = \sqrt{3E}.$$

$$2.4.16. d(s_1, s_2) = d(s_2, s_3) = d(s_1, s_3) = \sqrt{3E}.$$

2.4.17. Пространство первичных сигналов при передаче показана  
 на рис. О.2.2,а, при приеме — на рис. О.2.2,б.

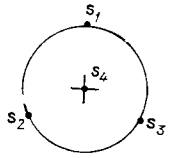


Рис. О 2.1. К задаче 2.4.15

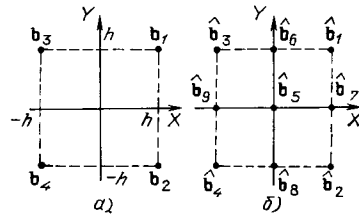


Рис. О 2.2 К задаче 2.4.17

2.5.3. 1) 0,173 с; 2) 0,183 с; 3) 0,592 с; 4) 0,151 с; 5) 0,223 с; 6) 0,288 с; 7) 1,11 с; 8) 0,237 с; 9) 0,42 с; 10) 0,634 с; 11) 0,126 с; 12) 0,634 с.

2.5.4. 30.

2.5.5. 1) 98; 2) 188; 3) 96; 4) 174; 5) 104; 6) 56; 7) 100; 8) 50; 9) 104; 10) 50; 11) 104; 12) 142.

2.5.7. 1) 0,33; 2) 0,08; 3) 0,41; 4) 0,57; 5) 0,57; 6) 0,08; 7) 0,195; 8) 0,53; 9) 0,48; 10) 0,26; 11) 0,23; 12) 0,16.

2.5.10. 1) 0,23 с; 2) 0,7 с; 3) 0,17 с; 4) 0,28 с; 5) 0,14 с; 6) 1 с; 7) 0,19 с; 8) 0,05 с; 9) 0,12 с; 10) 0,26 с; 11) 0,39 с; 12) 0,58 с.

### Ответы к задачам главы 3

3.1.1. Канал непрерывен по амплитуде, так как ее значение на входе и выходе канала произвольно. По фазе канал дискретно-непрерывен, поскольку на входе значения фазы равны  $2\pi i/m$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), а на выходе — произвольны.

3.1.4. 8,3 · 10<sup>-8</sup>; 2) 1,7 · 10<sup>-5</sup>; 3) 1,6 · 10<sup>-8</sup>; 4) 2,2 · 10<sup>-16</sup>; 5) 3,4 · 10<sup>-27</sup>; 6) 2,2 · 10<sup>-4</sup>; 7) 5,7 · 10<sup>-6</sup>; 8) 1,4 · 10<sup>-28</sup>; 9) 1,3 · 10<sup>-26</sup>; 10) 9,4 · 10<sup>-13</sup>; 11) 1,7 · 10<sup>-9</sup>; 12) 4,4 · 10<sup>-25</sup>.

3.1.9.  $p_{\text{прав}} = 1 - p_{\text{ош}} - p_{\text{с}}$ ;  $p_{\text{ош}} = (m-1)p_0$ ;  $p_{\text{ст}} = 1 - p_{\text{прав}} - p_{\text{ош}}$ .

3.1.11. 1) 0,42; 0,014; 0,5 2) 0,44; 0,03; 0,5; 3) 0,26; 0,012; 0,5; 4) 0,32; 0,025; 0,5; 5) 0,28; 0,012; 0,5; 6) 0,27; 0,025; 0,5; 7) 0,41; 0,5; 8) 0,23; 0,058; 0,5; 9) 0,35; 0,025 0,5; 10) 0,41; 0,027; 0,5; 11) 0,5; 0,071; 0,5; 12) 0,11; 0,032; 0,5.

3.1.13. E[8] = 01101101; 5; канал без памяти.

3.1.14. E[8] = 00111000; канал симметричный с памятью.

3.1.17.  $\omega(z|s_i) = K \exp[-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - s_i(t)]^2 dt]$ ;  $K = (1/\sqrt{2\pi N_0 F})^{n_{F \rightarrow \infty}}$ .

3.2.2.  $K(j\omega) = k \exp(-j2\omega\tau_c)$ .

3.2.4. 1) 2 мс; 2) 18 мкс; 3) 0,75 мс; 4) 15 мс; 5) 0,3 мс;

6) 8,5 мкс; 7) 1,5 мс; 8) 1,5 мс; 9) 1,8 мс; 10) 5 мс; 11) 1,25 мс; 12) 7,5 мс.

3.2.7. 1) 20 Гц; 2) 800 Гц; 3) 10 Гц; 4) 340 Гц; 5) 2 Гц; 6) 997 Гц; 7) 80 Гц; 8) 120 Гц; 9) 100 Гц; 10) 200 Гц.

270

3.2.9. 1) 5; 2) 0,625; 3) 1,06; 4) 0,25; 5) 0,03; 6) 0,11; 7) 0,07; 8) 0,4; 9) 6,7; 10) 0,08.

3.2.12.  $N_{\text{рел}} = \exp(-k^2/2\rho)$ , где  $\rho = P_c/P_{\text{ш}} = A^2 k^2 / 2U_{\text{ш}}^2$ ;  $N_{\text{о.н}} = 1 - \Phi(k/h\sqrt{2})$ .

3.2.14.  $K(j\omega)_{\text{кор}} = (B_0/A_0) \exp(\omega A) \exp(a_2 \omega^2 + (a_1 - b)\omega)$ .

3.2.18. Квадратичную характеристику корректирует нелинейность вида  $x(t) = b \sqrt{|u(t)|}$ .

3.3.3. 1) 4,5 · 10<sup>6</sup>; 2) 2,8 · 10<sup>16</sup>; 3) 6,1 · 10<sup>16</sup>; 4) 5,6 · 10<sup>15</sup>; 5) 3,7 · 10<sup>6</sup>; 6) 5,1 · 10<sup>6</sup>; 7) 1,02 · 10<sup>17</sup>; 8) 5,08 · 10<sup>16</sup>; 9) 4,04 · 10<sup>16</sup>; 10) 5,6 · 10<sup>16</sup>; 11) 1,3 · 10<sup>17</sup>; 12) 1,8 · 10<sup>16</sup>.

3.3.5. 1) 1,9 · 10<sup>-7</sup>; 2) 4,2 · 10<sup>-6</sup>; 3) 3,9 · 10<sup>-3</sup>; 4) 2,2 · 10<sup>-7</sup>; 5) 0,95; 6) 0,72; 7) 6,1 · 10<sup>-29</sup>; 8) 0,8; 9) 0,72; 10) ~ 0; 11) 0,75; 12) ~ 0.

3.3.6. 5 (7 дБ).

3.3.10. 1) 0,999; 2) 0,999999; 3) 0,687; 4) 0,9998; 5) 0,769; 6) 0,998; 7) 0,999999; 8) 0,996; 9) 0,9999; 10) 0,998 11) ~ 1; 12) ~ 1.

3.3.14.  $p_{\text{ош}} = C^2_3 p^2_{\text{и.п}} + C^3_3 p^3_{\text{и.п}} \approx 3p^2_{\text{и.п}}$ . При примитивном кодировании  $p_{\text{ош}} = p_{\text{и.п}}$ ;  $p_{\text{и.п}}/3p^2_{\text{и.п}} \approx 33$ .

3.4.2.  $B_y(t, t+\tau) = \overline{K(t)K(t+\tau)} B_x(\tau)$ .

3.4.3.  $B_y(t, t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 G_x(\omega) \exp(j\omega\tau) df$ .

### Ответы к задачам главы 4

4.1.1. 1) 2,33 бит; 2) 1,75 бит; 3) 1,33 бит; 4) 3,33 бит;  $H(A) = 1,86$  бит/символ;  $\chi_{\text{и}} = 0,07$ .

4.1.9.  $H(A) = 4,35$  бит/символ;  $H_{\text{макс}}(A) = 5$  бит/символ;  $\chi_{\text{и}} = 0,13$ . С учетом статистических связей  $\chi_{\text{и}} = 0,8$ .

4.1.10.  $H(A) = 4,043$  бит/символ;  $H_{\text{макс}}(A) = 4,754$  бит/символ;  $\chi_{\text{и}} = 0,15$ . С учетом статистических связей  $\chi_{\text{и}} = 0,52$ .

4.2.3. 1) 1200 бит/символ; 2) 5400 бит/символ; 3) 6900 бит/символ; 4) 3500 бит/символ; 5) 1200 бит/символ; 6) 3800 бит/символ; 7) 2000 бит/символ; 8) 2200 бит/символ; 9) 3200 бит/символ; 10) 2800 бит/символ.

4.2.5. 1)  $H(B|B) = 10$  бит/символ;  $H(B) = 50$  бит/символ;  $H'(B) = 1000$  бит/с;  $H'(B|B) = 500$  бит/с;  $I'(B, B) = 500$  бит/с;  $H'(B|B) = 2000$  бит/с.

4.2.7. 1) 959 бит/с; 2) 1742 бит/с; 3) 133 бит/с; 4) 2098 бит/с; 5) 982 бит/с; 6) 559 бит/с; 7) 1610 бит/с; 8) 1577 бит/с; 9) 2081 бит/с; 10) 2327 бит/с.

4.2.13. Граф кода Хаффмена приведен в табл. О.4.1. При таком коде  $n_{\text{ср}} = 3$ . При равномерном двоичном кодировании

Таблица О.4.1

Символ	$p(a_i)$	Граф кода Хаффмена	Код
$a_1$	1/4		1
$a_2$	1/4		01
$a_3$	1/8		0011
$a_4$	1/8		0010
$a_5$	1/16		00011
$a_6$	1/16		00010
$a_7$	1/16		00001
$a_8$	1/16		00000

Таблица О.4.2

Символ	$p(a_i)$	Граф кода Хаффмена	Код
A	0,4		1
B	0,25		01
C	0,15		001
D	0,1		0001
E	0,05		00001
F	0,05		00000

$n_{\min} = \log_2 K = 3$ . В данном случае экономия в числе разрядов равна нулю.

4.2.14. Граф кода Хаффмена приведен в табл. О.4.2.

Среднее число разрядов в кодовой комбинации  $n_{\text{ср}} = 2,25$ ;

$H(A) = 2,21$ ;  $[n_{\text{ср}} - H(A)]/H(A) = 0,018$ .

4.2.16.  $A \rightarrow 1$ ;  $B \rightarrow 01$ ;  $C \rightarrow 001$ ;  $D \rightarrow 0001$ ;  $E \rightarrow 00001$ ;  $F \rightarrow 00000$ ;  
 $n_{\text{ср}} = 2,25$ ;  $[n_{\text{ср}} - H(A)]/H(A) = 0,018$ .

4.2.17. а)  $A \rightarrow 1$ ;  $B \rightarrow 01$ ;  $C \rightarrow 001$ ;  $D \rightarrow 000$ ;  $n_{\text{ср}} = 1,75$ ;  $H(A) = 1,75$ ;  
 б)  $A \rightarrow 1$ ;  $B \rightarrow 01$ ;  $C \rightarrow 001$ ;  $D \rightarrow 000$ ;  $n_{\text{ср}} = 1,6$ ;  $H(A) = 1,53$ .

4.3.4. 1) 7,64 бит/отсчет; 2) 8,97 бит/отсчет; 3) 6,64 бит/отсчет;  
 4) 6,49 бит/отсчет; 5) 6,13 бит/отсчет; 6) 6,13 бит/отсчет;  
 7) 8,23 бит/отсчет; 8) 6,32 бит/отсчет; 9) 7,64 бит/отсчет;  
 10) 8,23 бит/отсчет.

4.3.5.  $h(X_p) = \log \sqrt{12\sigma^2}$ ;  $h(X_n) = \log \sqrt{2\text{пе}\sigma^2}$ ;  $\Delta h = 0,3$  бит/отсчет.

4.3.6.  $h(X) = \log \sqrt{2\text{пе}\sigma^2_x}$ ;  $h(Y) = \log \sqrt{2\text{пе}(\sigma^2_x + \sigma^2_n)}$ ;  $h(X/Y) = \log \sqrt{2\text{пе}\sigma^2_x \sigma^2_n / (\sigma^2_x + \sigma^2_n)}$ .

4.3.10.  $H'_e(X_p) = 2F_c(\log \sqrt{12\sigma^2_x} - \log \sqrt{2\text{пе}\sigma^2_n})$ ;

$H'_e(X_n) = 2F_c(\log \sqrt{2\text{пе}\sigma^2_x} - \log \sqrt{2\text{пе}\sigma^2_n})$ .

4.3.11.  $\kappa_n = 1 - \frac{\log \sqrt{12 P_c} - \log \sqrt{2 \text{пе} P_m}}{\log \sqrt{P_c/P_m}}$ .

4.3.13. 1)  $2,5 \cdot 10^{-5}$ ; 2)  $5,6 \cdot 10^{-5}$ ; 3)  $10^{-4}$ ; 4)  $6,2 \cdot 10^{-4}$ ; 5)  $2,5 \cdot 10^{-3}$ ;  
 6)  $10^{-2}$ ; 7)  $4 \cdot 10^{-2}$ ; 8) 0,16; 9) 0,25; 10) 0,36.

4.4.2. 1) 2,27 бит/отсчет; 2) 3,04 бит/отсчет; 3) 2,05 бит/отсчет;  
 4) 2,2 бит/отсчет; 5) 3,1 бит/отсчет; 6) 2,4 бит/отсчет;  
 7) 2,06 бит/отсчет; 8) 1,8 бит/отсчет; 9) 1,08 бит/отсчет;  
 10) 1,59 бит/отсчет.

4.4.4. 1) 336 бит/с; 2) 1581 бит/с; 3) 301 бит/с; 4) 1969 бит/с;  
 5) 1666 бит/с; 6) 1962 бит/с; 7) 116 бит/с; 8) 1003 бит/с;  
 9) 180 бит/с; 10) 1219 бит/с.

### Ответы к задачам главы 5

5.1.3.  $\kappa_k = 0,3$ ;  $R_k = 0,7$ . При  $n = 8$   $\kappa_k = 0,125$ ,  $R_k = 0,875$ . При  $n = 12$   $\kappa_k = 0,417$ ,  $R_k = 0,533$ .

5.1.4.  $\kappa_k = 0,467$ ;  $R_k = 0,533$ .

5.1.7. 1)  $\kappa_k = 2/7$ ;  $R_k = 5/7$ ; 2)  $\kappa_k = 1/3$ ;  $R_k = 2/3$ ; 3)  $\kappa_k = 0,248$ ;  
 $R_k = 0,752$ ; 4)  $\kappa_k = 0,197$ ;  $R_k = 0,803$ .

5.1.8. 1) 0,5; 0,0625; 2) 0,875; 0,0625; 3) 0,9375;  $4,88 \cdot 10^{-4}$ ;  
 4) 0,9996;  $9,76 \cdot 10^{-4}$ .

5.1.9. 0,5.

5.1.10.  $d_{\min} = 4$ .

5.1.11.  $q_n = 3$ .

5.1.12. а)  $d_{\min} = 8$ ; б)  $d_{\min} = 12$ .

5.2.2.  $\kappa_k = 0,2$ ;  $p_{\text{прав}} = C_{125}^1 p_0 (1-p_0)^{124} + C_{125}^2 p_0^2 (1-p_0)^{123}$ .

5.2.1. Код является линейным,  $d_{\min} = 2$ ,  $\kappa_k = 0,2$ .

5.2.3.

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

5.2.4.  $b_{5, \text{нр}} = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3$ ;  $b_{6, \text{нр}} = b_1 \oplus b_2 \oplus b_4$ ;  $b_{7, \text{нр}} = b_1 \oplus b_3 \oplus b_4$ ;

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Таблица О.5.1

Синдром	001	010	011	100	101	110	111
Разряд кодовой комбинации, подлежащий исправлению	7	6	1	5	2	3	4

5.2.6. Синдромы, соответствующие одиночным ошибкам в различных разрядах кодовых комбинаций, приведены в табл. О.5.1.

5.2.10. Более просто реализуется второй код.

5.2.12. Ошибки имеются в комбинациях 110011, 0011010, 1000100, 0010101, 1011011, 0110010.

5.2.17. Правила формирования проверочных разрядов  $b_{5,пр} = b_1 \oplus b_2 \oplus b_4$ ;  $b_{6,пр} = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3$ ;  $b_{7,пр} = b_2 \oplus b_3 \oplus b_4$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

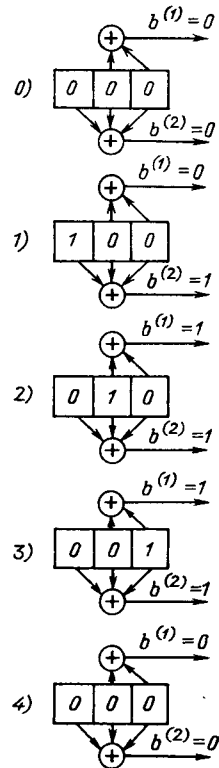


Рис. О.5.1. К задаче 5.4.17

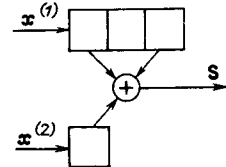


Рис. О.5.2. К задаче 5.4.21

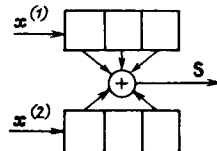


Рис. О.5.3. К задаче 5.4.23

5.3.3.  $b_1(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$ ;  $b_2(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ;  
 $b_3(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x + 1$ .

5.3.6.  $h(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ .

5.3.7.  $h(x) = x^5 + x^4 + x + 1$ .

5.3.11.  $q_n = 1$ . 5.3.12. 1)  $q_n = 1$ ; 2)  $q_n = 1$ ; 3)  $q_n = 1$ .

5.4.3.  $n = 35$ ;  $k = 16$ ;  $d_{мин} = 6$ .

5.4.4.  $K = C^3_7 = 35$ ;  $\kappa_k = 0,265$ . Разрешенными являются комбинации, содержащие единицы в любых трех разрядах и нули в остальных разрядах: 1000110, 1110000 и т. д.

5.4.10.  $p_{н.о} = C^1_3 p_0 (1-p_0)^2 C^1_4 p_0 (1-p_0)^3 = 12 p_0^2 (1-p_0)^5$ ;  $\kappa_k = 0,268$ .

5.4.11.  $\kappa_k = 0,5$ ;  $p_{н.о} = p^2_0$ .

5.4.12.  $p_{н.о} = C^2_n p^4_0$ .

5.4.16. Для верхнего регистра  $K = 3$ , для нижнего —  $K = 2$ ,  $R = 2/3$ .

5.4.17. Последовательность состояний регистра приведена на рис. О.5.1. Последовательность на выходе  $b = 01101101$ .

5.4.21.  $H_s^{(1)}(D) = 1 + D^2$ ;  $H_s^{(2)}(D) = 1$ . Схема формирователя синдрома приведена на рис. О.5.2.

5.4.22.  $S = |110001|$ .

5.4.23.  $H_s^{(1)}(D) = 1 + D + D^2$ ;  $H_s^{(2)}(D) = 1 + D^2$ . Схема формирователя синдрома на рис. О.5.3.

5.4.24.  $S = |111000|$ .

### Ответы к задачам главы 6

6.1.2. 1)  $b_2$ ; 2)  $b_1$ ; 3)  $b_2$ ; 4)  $b_2$ ; 5)  $b_2$ ; 6)  $b_2$ ; 7)  $b_2$ ; 8)  $b_1$ ; 9)  $b_2$ ; 10)  $b_1$ .

6.1.4. 1) 0,22 В; 2) -0,219 В; 3) -0,14 В; 4) 0,14 В; 5) -0,08 В; 6) 0,08 В; 7) -0,02 В; 8) 0,02 В; 9) -0,087 В; 10) 0,087 В.

6.1.9. Будет зарегистрирован символ 1, так как его апостериорная вероятность больше.

6.2.11. 1) 8; 2) 8; 3) 10; 4) 10; 5) 12; 6) 12; 7) 14; 8) 14; 9) 16; 10) 16; 11) 16; 12) 16; 13) 16; 14) 16; 15) 16.

6.3.2.  $p_{ош} = 0,5[1 - \Phi(a/\sigma)]$ .

6.3.3.  $p_{ош} = 0,5\{P(b_1)[1 - \Phi\{(U_0 - a)/\sigma\}] + P(b_2)[1 - \Phi\{(U_0 + a)/\sigma\}]\}$ , где  $U_0 = (\sigma^2/2a) \ln[P(b_2)/P(b_1)]$ .

6.3.6. При  $P(b_1) = P(b_2) = 0,5$   $p_{ош} = 0,5[1 - \Phi(\sqrt{E_s/2N_0})]$ ;

$p_{ош АМ} = 0,5[1 - \Phi(\sqrt{h^2/2})]$ ;  $p_{ош ЧМ} = 0,5[1 - \Phi(\sqrt{h^2})]$ ;  $p_{ош ФМ} = 0,5[1 - \Phi(\sqrt{2h})]$ .

6.3.11. 1а) уменьшится в 12,5 раз; 1б) останется неизменной; 2а) уменьшится в 3250 раз; 2б) уменьшится в 12,5 раз; 3) уменьшится в 200 раз.

$$6.3.16. \rho_{\text{ош АМ}} = 0,5 \left\{ 1 - \Phi \left[ \sqrt{2h^2} \left( \frac{T-\tau}{T} \cos \varphi - 0,5 \right) \right] \right\};$$

$$\eta_{\text{АМ}} = 0,25 / [(1-\tau/T) \cos \varphi - 0,5]^2;$$

$$\rho_{\text{ош ЧМ}} = 0,5 \{ 1 - \Phi [ \sqrt{h^2} \cos \varphi (1-2\tau/T) ] \};$$

$$\eta_{\text{ЧМ}} = 1 / \cos^2 \varphi (1-2\tau/T)^2.$$

$$6.3.18. \rho_{\text{ош АМ}} = 0,5 \{ 1 - \Phi [ \sqrt{2h^2} (\sin \Delta \omega T / \Delta \omega T - 0,5) ] \};$$

$$\eta_{\text{АМ}} = 0,25 / (\sin \Delta \omega T / \Delta \omega T - 0,5)^2;$$

$$\rho_{\text{ош ЧМ}} = 0,5 \{ 1 - \Phi ( \sqrt{h^2} \sin \Delta \omega T / \Delta \omega T ) \};$$

$$\eta_{\text{ЧМ}} = (\Delta \omega T)^2 / \sin^2 \Delta \omega T.$$

$$6.4.2. \max_i (V_i) \text{ или } V_i \underset{b_j}{\overset{b_i}{\geq}} V_j, i \neq j.$$

$$6.4.4. P_c = -2P_{\text{ш}} \ln 2\rho_{\text{ош}}/k^2.$$

$$6.4.5. F = -k^2 P_c / 2N_0 \ln 2\rho_{\text{ош}}.$$

### Ответы к задачам главы 7

$$7.1.13. \sigma_a^2 = \frac{4\sigma^2}{\alpha\tau_{\text{н}}(1+\omega^2/\alpha^2)}.$$

$$7.1.14. \sigma_a^2 = \frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi/1,4}(\alpha\tau_{\text{н}}+2,8/\alpha\tau_{\text{н}})}.$$

$$7.1.15. \sigma_a^2 = \frac{8\alpha\omega_0^2\sigma^2}{(\omega-\omega_0)^2+4\alpha^2\omega^2}; \text{ при } \omega=\omega_0 \quad \sigma_a^2=2\sigma^2/\alpha.$$

$$7.1.16. \sigma_{\tau_0}^2 = \frac{\tau_{\text{н}}^2}{5,6E/N_0}; \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, \tau_0) dt.$$

$$7.1.17. \sigma_{\tau_0}^2 = \sigma^2\tau_{\text{н}}/1,4\alpha E.$$

$$7.2.1. b(t) = \sum_{k=1}^{B_c} \left[ \lambda_{2k-1} \sqrt{2} \sin(2k-1) \frac{2\pi}{T} t + \lambda_{2k} \sqrt{2} \cos 2k \frac{2\pi}{T} t \right];$$

$$\hat{b}(t) = \sum_{k=1}^{B_c} \left[ \hat{\lambda}_{2k-1} \sqrt{2} \sin(2k-1) \frac{2\pi}{T} t + \hat{\lambda}_{2k} \sqrt{2} \cos 2k \frac{2\pi}{T} t \right];$$

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{B_c} \left[ \Delta\lambda_{2k-1} \sqrt{2} \sin(2k-1) \frac{2\pi}{T} t + \Delta\lambda_{2k} \sqrt{2} \cos 2k \frac{2\pi}{T} t \right].$$

где  $\Delta\lambda_k = \hat{\lambda}_k - \lambda_k$ .

$$7.2.7. g = F/\Pi^2 P_{\text{с.вх}} \int_0^{F_c} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \{s(b(t), t)\} \right]^{-2} df,$$

$$g' = F_c/\Pi^2 P_{\text{с.вх}} \int_0^{F_c} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \{s(b(t), t)\} \right]^{-2} df.$$

$$7.2.8. g = \frac{F \left\{ \frac{\partial}{\partial b} [s(b(t), t)] \right\}^2}{F_c \Pi^2 P_{\text{с.вх}}}; \quad g' = \frac{\left\{ \frac{\partial}{\partial b} [s(b(t), t)] \right\}^2}{\Pi^2 P_{\text{с.вх}}}.$$

$$7.2.9. g = \frac{3F \left\{ \frac{\partial}{\partial v} [s(v(t), t)] \right\}^2}{4\pi^2 F_c^3 \Pi^2 P_{\text{с.вх}}}; \quad g' = \frac{3 \left\{ \frac{\partial}{\partial v} [s(v(t), t)] \right\}^2}{4\pi^2 F_c^2 \Pi^2 P_{\text{с.вх}}}.$$

$$7.2.10. g_{\text{АМ}} = 2m^2/(m^2+\Pi^2); \quad g'_{\text{АМ}} = m^2/(m^2+\Pi^2).$$

$$7.2.11. g_{\text{БМ}} = 2; \quad g'_{\text{БМ}} = 1.$$

$$7.2.13. g_{\text{ФМ}} = F \beta_{\text{ФМ}}^2 / F_c \Pi^2; \quad g'_{\text{ФМ}} = \beta_{\text{ФМ}}^2 / \Pi^2.$$

$$7.2.19. g'_{\text{ЧМ-АМ}} = 3m^2 \beta_{\text{ЧМ}}^2 / 2\Pi^2 (1+m^2/2); \quad g'_{\text{ОМ-АМ}} = m^2/(m^2+\Pi^2);$$

$$g'_{\text{ОМ-ОМ}} = 1; \quad g'_{\text{ФМ-ОМ}} = \beta_{\text{ФМ}}^2 / \Pi^2; \quad g'_{\text{ЧМ-ОМ}} = 3\beta_{\text{ЧМ}}^2 / \Pi^2;$$

$$g'_{\text{ФМ-АМ}} = \beta_{\text{ФМ}}^2 m^2 / \Pi^2 (m^2 + \Pi^2); \quad g_{\text{ИМ-БМ}} = 0,6 F^2 / \Pi^2 F_c^2;$$

$$g'_{\text{ОМ-ФМ}} = \beta_{\text{ФМ}}^2 / \Pi^2; \quad g'_{\text{АМ-ФМ}} = m^2 \beta_{\text{ФМ}}^2 (2+m^2) / 2(\Pi^2+m^2) \times (1+m)^2;$$

$$g'_{\text{БМ-ФМ}} = \beta_{\text{ФМ}}^2 / 2\Pi^2; \quad g'_{\text{БМ-АМ}} = m^2/(m^2+\Pi^2).$$

$$7.2.21. \rho_{\text{пор}} = 7.$$

$$7.2.22. \beta_{\text{ЧМ}} \leq \sqrt{\rho_{\text{вх}} \Pi^2 / 6\rho_{\text{пор}}} = 10.$$

$$7.3.6. \frac{d\hat{S}}{dt} = -\alpha \hat{S}(t) + \alpha (\sqrt{1+\Lambda}-1) (z(t) - \hat{S}(t)).$$

$$7.3.17. 8h^2_0 [\text{Si}(x/2)]^2 / \pi x.$$

$$7.3.18. \Delta f_{\text{опт}} = 1,37\tau_{\text{н}}; \quad r^2_{\text{макс}} = 0,82 \cdot 2h^2_0.$$

### Ответы к задачам главы 8

$$8.1.2. \text{ При } k=1, h^2=10,8; \text{ при } k=10, h^2=13,1; \text{ при } k=100, h^2=15,4; \text{ при } k=1000, h^2=17,8.$$

$$8.1.3. \text{ При } k=1, h^2=8,95; \text{ при } k=10, h^2=11,3; \text{ при } k=100, h^2=13,5; \text{ при } k=1000, h^2=15,7.$$

8.1.6. График зависимости  $P_c/P_B = f(L)$  приведен на рис. О.8.1. При удвоении числа уровней квантования  $P_c/P_B$  уменьшается примерно на 6 дБ.

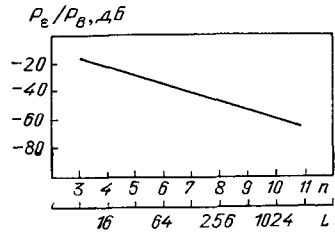


Рис. О.8.1. К задачам 8.1.6, 8.1.7

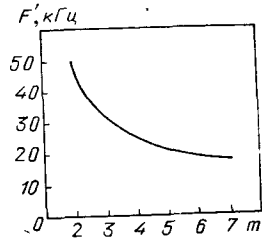


Рис. О.8.3. К задаче 8.1.13

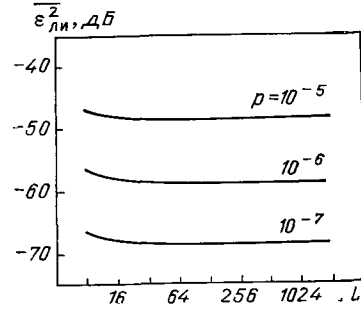


Рис. О.8.2. К задаче 8.1.9

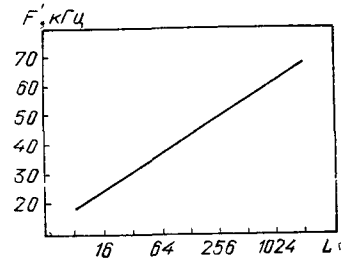


Рис. О.8.4. К задаче 8.1.14,

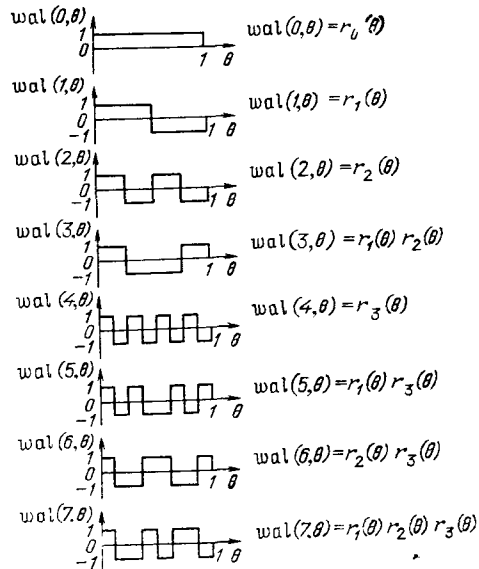


Рис. О.9.1. Графики первых восьми функций Уолша (к задаче 9.2.18)

8.1.7. График зависимости  $P_e/P_B = f(n)$  приведен на рис. О.8.1. Увеличение числа разрядов  $n$  на единицу уменьшает  $P_e/P_B$  примерно на 6 дБ.

8.1.9. Графики зависимости  $\overline{\varepsilon^2_{л.н}} = f(L)$  приведены на рис. О.8.2.

8.1.13. График зависимости  $F' = f(m)$  при  $L = 128$  приведен на рис. О.8.3.

8.1.14. График зависимости  $F' = f(L)$  приведен на рис. О.8.4.

8.1.17.  $g_{икм-чм} = 135$ ;  $g'_{икм-чм} \approx 9,6$ .

### Ответы к задачам главы 9

9.1.7. Отношение сигнал-шум в  $k$ -канале  $\rho_k = 2F_k/N_0$ .

9.1.8.  $s(t) = C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_N t^N$ .

9.1.9.  $C_1$ ;  $C_2$ . 9.2.3.  $\sim 97,1$  МГц.

9.2.4.  $\sim 583$  МГц.

9.2.5.  $n \approx 10$ ; при  $\tau_{защ} = 0$   $n = 12$ .

9.2.6. 57,8 МГц.

9.2.8.  $P_{п.п}/P_c = tg^2 \Delta$ .

9.2.17. Графики приведены на рис. О.9.1.  $F \approx 400$  Гц.

### Ответы к задачам главы 10

10.1.3.  $\gamma_{\max} = 2$  бит/с Гц;  $\beta_{\max} = -0,4$  дБ.

10.1.4.  $\gamma_{\max} = 4$  бит/с Гц;  $\beta_{\max} = -0,8$  дБ.

10.1.10.  $2,9 \cdot 10^{-4}$ ;  $3,2 \cdot 10^{-6}$ ;  $9,7 \cdot 10^{-8}$ ;  $5,4 \cdot 10^{-16}$ ;  $1,7 \cdot 10^{-22}$ .

10.1.12.  $\eta = 1,33 \cdot 10^{-1}$ .

10.1.19. 144.

10.2.2. Для ФИМ—АМ  $g = 666$ ,  $\eta = 0,17$ ; для ИКМ—АМ  $g = 250$ ;  $\eta = 0,23$ ; для ИКМ—ЧМ  $g = 500$ ;  $\eta = 0,32$ ; для ИКМ—ФМ  $g = 1000$ ,  $\eta = 0,47$ .

10.2.3.  $\Delta\gamma = 6$  дБ,  $\Delta\beta = 0$  дБ.

10.2.4. При  $\rho_{\text{вых}} = 30$  дБ,  $\Delta\gamma = 3$  дБ,  $\Delta\beta = 6$  дБ. При  $\rho_{\text{вых}} = 40$  дБ  $\Delta\gamma = 3$  дБ,  $\Delta\beta = -6$  дБ.

10.2.5.  $\Delta\gamma = -4$  дБ;  $\Delta\beta = 7$  дБ.

10.2.7. 50,5 дБ.

10.2.10.  $\Delta\beta = 3$  дБ,  $\Delta\gamma = -3$  дБ.

10.2.11.  $\Delta\beta = 0$  дБ;  $\Delta\gamma = 0$  дБ.

10.2.12.  $\Delta\beta = 19$  дБ;  $\Delta\gamma = -11,6$  дБ.

10.2.13.  $\Delta\beta = 22,7$  дБ;  $\Delta\gamma = -11,5$  дБ.

10.2.14.  $\Delta\beta = 11,5$  дБ;  $\Delta\gamma = -11,5$  дБ.

10.2.15. 99%; 36%; 0,0045%.

10.2.17.  $N_3/N_2 = 1,16$ ; при  $N_1 = 0,5$ .

10.3.2. 10 каналов.

10.3.3. Для системы с согласованными фильтрами  $\gamma = 0,5$  бит/Гц;  $\xi_F(n) = 31$ ;  $\mu_n = 31$ ;  $\gamma_n = 0,5$  бит/Гц. Для системы с полосовыми фильтрами  $\gamma_1 = 0,17$  бит/Гц,  $\xi_F(n) = 10$ ;  $\mu_n = 10$ ;  $\Delta\gamma = 3$ .



10.3.6.  $F_{\text{ЧМ-ЧМ}}/F_{\text{АА}}=6,75 \cdot 10^{-1}$ ;  $P_{\text{макс АА}}/P_{\text{макс ЧМ-ЧМ}}=9,1 \cdot 10^3$   
(39,6 дБ).

10.3.13. В 25 раз.

- 10.4.3. 1)  $p_s=5,25 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta_{(n,n)/(7,4)}=19$ ;  
2)  $p_s=5,25 \cdot 10^{-8}$ ,  $\delta_{(n,n)/(7,4)}=1900$ ;  
3)  $p_s=5,25 \cdot 10^{-12}$ ,  $\delta_{(n,n)/(7,4)}=190000$ .

10.4.6. ЭВ $_{(n,n)/(7,4)}=-4$  дБ.

10.4.8. 1) 4 дБ; 2) 9 дБ; 3) 14 дБ; 4) 19 дБ; 5) 24 дБ.

10.4.11. Целесообразно.

10.4.12. Нецелесообразно.

10.4.13.  $\kappa_k=0,5$ .

10.4.16.  $\gamma=2$ ;  $\beta=-9,6$  дБ;  $\eta=0,47$ .

- 10.4.17. 1) АМ<sub>2</sub>; ЧМ<sub>2</sub>; 2) системы с корректирующими кодами;  
3) многопозиционные системы ФМ и АФМ; 4) многопозиционные системы ФМ и АФМ с корректирующими кодами.

10.4.18. Биортогональные сигналы с  $M=16$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астанин Л. Ю., Дорский Ю. Д., Костылев А. А. Применение программируемых калькуляторов для инженерных и научных расчетов. — Л.: Энергоатомиздат, 1985. — 176 с.
2. Витерби А. Д., Омура Дж. К. Принципы цифровой связи и кодирования: Пер. с англ./Под ред. К. Ш. Зигангирова. — М.: Радио и связь, 1982. — 526 с.
3. Горяинов В. Т., Журавлев А. Г., Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Примеры и задачи: Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Сов. радио, 1980. — 542 с.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. — 5-е изд., перераб. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.
5. Дьяконов В. П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1989. — 464 с.
6. Жуков В. П., Карташов В. Г., Николаев А. М. Задачник по курсу «Радиотехнические цепи и сигналы» Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1986. — 159 с.
7. Зюко А. Г. Помехоустойчивость и эффективность систем связи. — М.: Связь, 1972. — 359 с.
8. Кловский Д. Д. Передача дискретных сообщений по радиоканалам. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1982. — 304 с.
9. Коржик В. И., Финк Л. М., Щелкунов К. Н. Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений: Справочник — М.: Радио и связь, 1981. — 231 с.
10. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Сов. радио, 1974—1976. — Т. 1—3.
11. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации/А. Г. Зюко, А. И. Фалько, И. П. Панфилов, В. Л. Банкет, П. В. Иващенко/Под ред. А. Г. Зюко — М.: Радио и связь, 1985. — 279 с.
12. Теория передачи сигналов: Учебник для вузов/А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, М. В. Назаров, Л. М. Финк. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1986 — 304 с.
13. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. — М.: Радио и связь, 1983. — 320 с.
14. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений — М.: Сов. радио, 1970. — 727 с.